Extraction et Exploitation de l'Information en Environnements Incertains

Théorie des fonctions de croyance et probabilités

Arnaud MARTIN

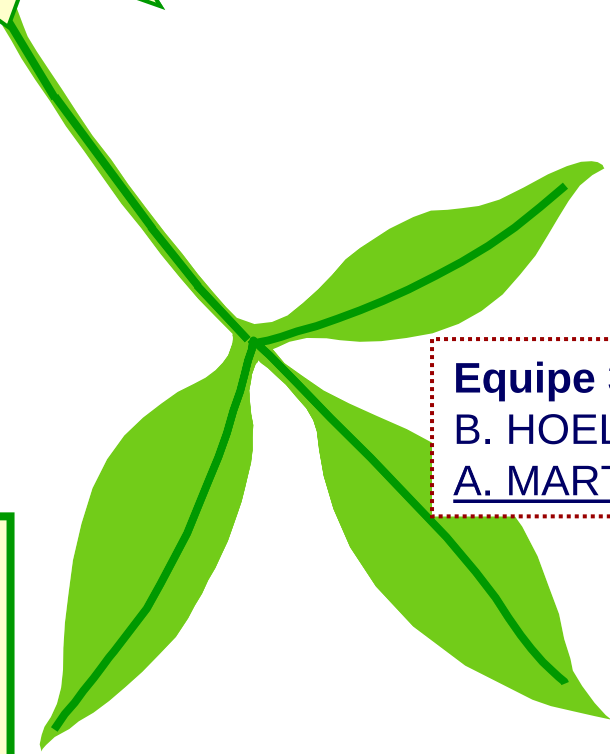
ENSIETA / E3I2 EA3876

Brest, France

ENSIETA
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS

> 3 thématiques

E^3I^2- EA3876



❶
Modélisation et Caractérisation de l'Environnement

Equipe 3 : Fusion et Aide à la Décision
B. HOELTZENER, L. JAULIN,
A. MARTIN, C. OSSWALD

❷
Représentation et Extraction de l'Information

❸
Fusion et Aide à la Décision

ENSIETA
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS

> Plan

1. La fusion d'informations
2. Approche Bayésienne
3. Les fonctions de croyance
4. La gestion du conflit dans la théorie des fonctions de croyance

La fusion d'informations

- **BUT : Combiner des informations issues de *plusieurs sources* imparfaites afin d'améliorer la prise de décision en tenant compte des imprécisions et incertitudes**
- **Contexte :** plusieurs experts (ou classifieurs) donnant une information sur la classe perçue
- **Problèmes :** les experts sont imparfaits et peuvent se contredire, les données sont imparfaites :
  - **les supprimer**
  - **les tolérer en robustifiant les algorithmes**
  - **les modéliser**

Architecture de fusion

Position du problème

m sources $S_1, S_2, \dots, S_m$ qui doivent prendre une décision sur une observation x dans un ensemble de n classes

$x \in C_1, C_2, \dots,$ ou C_n classes

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{array} \\
\begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ S_j \\ \vdots \\ S_m \end{array} &
\begin{bmatrix}
M_1^1(x) & \cdots & M_i^1(x) & \cdots & M_n^1(x) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
M_1^j(x) & \cdots & M_i^j(x) & \cdots & M_n^j(x) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
M_1^m(x) & \cdots & M_i^m(x) & \cdots & M_n^m(x)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ENSIETA
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS

> La fusion d'informations

- **4 étapes :**
  1. **Modélisation**
  2. **Estimation**
  3. **Combinaison**
  4. **Décision**

- **Méthodes :** Théories de l'incertain : Théorie des probabilités (approche bayésienne) ou Théorie des possibilités ou des fonctions de croyance

> Plan

1. La fusion d'informations

2. Approche Bayésienne

3. Les fonctions de croyance

4. La gestion du conflit dans la théorie des fonctions de croyance

ENSIETA
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS

> Approche Bayésienne

Approche probabiliste (théorie bayésienne, théorie de la décision, théorie de l'estimation, mesures d'entropie,…)

Caractéristiques de cette approche

- **Incertitude de l'information (pas l'imprécision)**
- **Cadre mathématique rigoureux**
- **Approche optimale si les probabilités *a priori* sont connues**

> Modélisation

Fondée sur les probabilités conditionnelles

$M_i^j(x)=p(x\in C_i/S_j)$ avec $j\in\{1,\ldots,m\}$ et $i\in\{1,\ldots,n\}$

C_i , $i\in\{1,\ldots,n\}$: ensemble des classes (hypothèses) exclusives et exhaustives

S_j peut être caractérisée par l'information fournie par la $j^{\text{ème}}$ source *i.e.* une fonction de l'observation x notée $f_j(x)$

D'où $M_i^j(x)=p(x\in C_i/f_j(x))$

> Estimation

- **Soit on connaît les distributions $p(x \in C_i / S_j)$ et on applique le modèle**
  - **rare en traitement du signal et des images**
  - **souvent approchées par des gaussiennes ou laplaciennes**
- **Soit on cherche à les estimer**
  - **par application de Bayes on cherche à estimer $p(f_j(x)/\, x \in C_i)$ ou $p(S_j/\, x \in C_i)$ par dénombrement (fréquences sur base d'apprentissage). Pour la fusion de classifieurs à partir des matrices de confusion**

> Combinaison

- **Au niveau de la modélisation**
  - **Si on connaît les distributions on calcule**

    $p(x \in C_i / S_1, \ldots, S_m)$ **pour tout** i

  - **Sinon par Bayes on a**

$$p(x \in C_i / S_1, \ldots, S_m) = \frac{p(S_1, \ldots, S_m / x \in C_i)\, p(x \in C_i)}{p(S_1, \ldots, S_m)}$$

> Combinaison

- **Par Bayes si les informations des sources sont fournies successivement et non simultanément**

$$p(x \in C_i / S_1,\dots, S_m) = \frac{p(S_1 / x \in C_i)\, p(S_2 / x \in C_i, S_1) \dots p(S_m / x \in C_i, S_1,\dots, S_{m-1})\, p(x \in C_i)}{p(S_1)\, p(S_2 / S_1)\, p(S_m / S_1,\dots, S_{m-1})}$$

- **Sous l'hypothèse d'indépendance des sources**

$$p(x \in C_i / S_1,\dots, S_m) = \frac{\prod_{j=1}^{m} p(S_j / x \in C_i)\, p(x \in C_i)}{\prod_{j=1}^{m} p(S_j)}$$

> Décision

Nombreux critères de décision envisageables

Maximum *a posteriori*

***x*∈*C*$_i$ si**

$$p(x \in C_i / S_1,\ldots,S_m) = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}}\{p(x \in C_k / S_1,\ldots,S_m)\}$$

le plus employé

Espérance maximale, maximum de vraisemblance, Maximum d'entropie, …

> Limites

- Représente mal l'imprécision (confusion de l'incertain et de l'imprécision)
- Apprentissage pour probabilités : besoin de beaucoup de données
- Modélisation : difficile de modéliser des connaissances qui ne se traduisent pas par des probabilités, ou l'absence de connaissances (*ex* : Sirius)
- Contraintes sur mesures (probabilités, additivité) et sur les classes (exhaustivité et exclusivité)

> Limites

Additivité

Exemple de Smets : domaine diagnostique médical

Si un symptôme *s* est toujours présent quand un patient a une pathologie *A* (p(*s*/*A*)=1), et que l'on observe ce symptôme *s*, alors la probabilité pour que le patient ait A augmente (car p(*A*/*s*)=p(*A*)/p(*s*) donc p(*A*/*s*)>=p(*A*)).

La contrainte d'additivité impose alors que la probabilité pour que le patient n'ait pas *A* diminue :

p(non*A*/*s*)=1-p(*A*/*s*) donc p(non*A*/*s*)<=p(non*A*)

Alors qu'il n'y a pas de raison, si le symptôme *s* peut aussi être observé dans d'autres pathologies.

> Conclusions

- Optimale lorsque l'*a priori* est parfaitement connu (jamais le cas en pratique)
- Base mathématique solide
- Outils riches et rigoureux pour la modélisation et l'apprentissage (connaissance acquise par de nombreuses expériences)
- Combinaison permettant la mise à jour
- Hypothèse d'indépendance pas obligatoire

ENSIETA
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS

> Plan

1. La fusion d'informations

2. Approche Bayésienne

3. Les fonctions de croyance

4. La gestion du conflit dans la théorie des fonctions de croyance

ENSIETA
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS

> La théorie des fonctions de croyance

- **Espace de discernement :** $\theta=\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ où C_i est une classe
- L'expert peut s'exprimer sur $2^\theta=\{\emptyset, \{C_1\}, \{C_2\}, \ldots, \{C_n\}, \{C_1,C_2\}, \ldots, \theta\}$, θ représente l'ignorance et $\emptyset$ l'ouverture au monde hors θ
- Extension de la DSmT : l'expert peut s'exprimer sur D^θ
- Les experts s'expriment à partir des **fonctions de masse** définies sur 2^θ à valeurs dans [0,1] pour une source S_j :

$$\sum_{A\in 2^\Theta} m_j(A) = 1$$

$m_j(A)$* caractérise un degré de croyance en *A

> Modélisation

Fonctions de masse : en pratique

- Fonctions à support simple : Toute la masse de la source S_j porte sur un sous-ensemble non vide A de 2^θ et sur l'ensemble de discernement θ (connaissance incertaine et imprécise)

  $m_j(A) = 1 - w$

  $m_j(\theta) = w,\ w \in [0,1]$

  $m_j(B) = 0$ pour tout $B \neq A,\ B \neq \theta$

  notée A_j^w

Si $w=0$, alors $m_j(\theta)=1$ ceci représente l'ignorance totale

Toute fonction de masse non dogmatique ($m_j(\theta)>0$) et si les A_j sont distincts admet une décomposition canonique en fonctions à support simple

- Modèle probabiliste d'A. Appriou
- Modèle distance de T. Denœux

> Modélisation

- Autres fonctions de croyance :
  - **La crédibilité** *bel* regroupe les masses inclues
  - **La plausibilité** *pl* regroupe les masses intersectées

  Intervalle de confiance

$$[bel(A), pl(A)]$$

> Décision

Décisions sur θ et pas sur 2^θ

- **Pessimiste :** $\max_{A\in\Theta} bel(A)$
- **Optimiste :** $\max_{A\in\Theta} pl(A)$
- **Compromis :** $\max_{A\in\Theta} betP(A)$

où la probabilité pignisitic (Smets90) est donnée pour $X \in 2^\Theta$, avec $X \neq \emptyset$

$$betP(X) = \sum_{Y\in 2^\Theta, Y\neq\emptyset} \frac{|X\cap Y|}{|Y|}\frac{m(Y)}{1-m(\emptyset)}.$$

> Combinaison

Afin de conserver un maximum d'informations, il est préférable de rester à un niveau crédal (*i.e.* de manipuler des fonctions de croyance) pendant l'étape de combinaison des informations pour prendre la décision sur les fonctions de croyance issues de la combinaison

> Combinaison conjonctive

- **La combinaison de 2 experts est donnée par :**

$$m(A) = \sum_{B_1 \cap B_2 = A} m_1(B_1) m_2(B_2)$$

- **Exemple**

	$\emptyset$	A	B	C	Θ
m_1	0	0.5	0.1	0	0.4
m_2	0	0.2	0	0.5	0.3
m	0.32	0.33	0.03	0.2	0.12

- **Problème : masse non nulle sur l'ensemble vide**
  - **en monde ouvert : représente une solution non prévue**
  - **en monde fermé : pas acceptable**

> Combinaison conjonctive normalisée

$$m(A) = \frac{\displaystyle\sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = A} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)}{1-k}$$ **si *A* ≠ Ø**

et *m*(Ø)=0

avec $$k = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j) < 1$$

***k* est une mesure de conflit entre les sources (dépend de la modélisation)**

(ou encore *inconsistance de la fusion*)

> Modélisation probabiliste

Idée d'Appriou : étendre le modèle sur singletons à l'aide des fonctions simples et en intégrant un coefficient de fiabilité (affaiblissement) de la source pour une classe donnée α_{ij}

2 modèles reposent sur 2 axiomes

1. Les $n*m$ couples $[M_i^j,\alpha_{ij}]$ sont des sources d'information distinctes dont les éléments focaux sont $\{C_i\}$, $\{C_i\}^c$ et Θ.

2. Si $M_i^j=0$ et M_i^j est valide ($\alpha_{ij}=1$) alors il est certain que C_i n'est pas vérifiée.

1. implique le calcul de m_j^i fonctions de masse à partir des $n*m$ couples $[M_i^j,\alpha_{ij}]$

2. limite le nombre de fonctions de masse à 2 types

> Modélisation probabiliste

L'axiome 2 entraîne 2 modèles :

Modèle 1 : $m_j^i(\{C_i\})(x) = M_i^j$

$m_j^i(\{C_i\}^c)(x) = 1 - M_i^j$

Modèle 2 : $m_j^i(\ominus)(x) = M_i^j$

$m_j^i(\{C_i\}^c)(x) = 1 - M_i^j$

Ajout de α_{ij} sous forme d'affaiblissement

Modèle 1 : $m_j^i(\{C_i\})(x) = \alpha_{ij} M_i^j$

$m_j^i(\{C_i\}^c)(x) = \alpha_{ij}(1 - M_i^j)$

$m_j^i(\ominus)(x) = 1 - \alpha_{ij}$

Modèle 2 : $m_j^i(\{C_i\})(x) = 0$

$m_j^i(\{C_i\}^c)(x) = \alpha_{ij}(1 - M_i^j)$

$m_j^i(\ominus)(x) = 1 - \alpha_{ij}(1 - M_i^j)$

> Modélisation probabiliste

Comment déterminer M_i^j ?

(Connaissant la règle de combinaison)

3ème axiome :

3. Conformité avec l'approche bayésienne (cas où $p(S_j|C_i)$ représente parfaitement la réalité (α_{ij} =1 pour tout i, j) et toutes les probabilités *a priori* $p(\{C_i\})$ sont disponibles)

Les sources S_j étant indépendantes, les résultats doivent être les mêmes si l'on calcule individuellement $p(S_j \mid C_i)$ ou directement la probabilité conjointe $p(S_1,\ldots, S_m \mid C_i)$

> Modélisation probabiliste

Modèle 1 :

$$M_i^j = \frac{R_j p(S_j \mid C_i)}{1 + R_j p(S_j \mid C_i)}$$

avec R_j facteur de normalisation tel que $R_j \geq 0$

Modèle 2 : $M_i^j = R_j\, p(S_j \mid C_i)$

avec $R_j \in [0, (\max_{s_j,i}(p(s_j / C_i)))^{-1}]$

Ainsi la théorie des fonctions de croyance peut être vue comme une extension des approches bayésiennes

ENSIETA
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS

> Plan

1. La fusion d'informations

2. Approche Bayésienne

3. Les fonctions de croyance

4. La gestion du conflit dans la théorie des fonctions de croyance

> Le conflit

Origines du conflit

- **Les sources ne sont pas fiables. L'information est erronée et peut conduire à une ambiguïté**
- **Le cadre de discernement est non exhaustif. Hypothèse d'un monde fermé fausse**
- **Les sources observent des phénomènes différents. Dans ce cas il ne faut pas les combiner**

Problème : la normalisation masque le conflit (Exemple de Zadeh)

> Exemple de Zadeh

	$\emptyset$	A	B	C	$\ominus$
m_1	0	0.9	0	0.1	0
m_2	0	0	0.9	0.1	0
m_{12} normalisée	0	0	0	1	0
m_{12} non normalisée	0.99	0	0	0.01	0

Toute la masse est sur *C* seul élément où les 2 sources sont d'accord

Problèmes :

- **Conjonctive normalisée :** La normalisation masque le conflit
  Intéressant si monde fermé sans conflit
- **Conjonctive non-normalisée :** la normalisation de la probabilité pignistique
  masque le conflit

> Propriété de la combinaison conjonctive

La loi $\oplus$ n'est pas idempotente

	$\emptyset$	A	B	C	$\ominus$
m_1	0	0.7	0.2	0.1	0
m_2	0	0.7	0.2	0.1	0
m_{12} normalisée	0	0.91	0.07	0.02	0
m_{12} non normalisée	0.46	0.49	0.04	0.01	0

Le conflit de deux sources identiques est non nul !

Auto-conflit d'ordre *n* (Martin et Osswald) : $a_n(j) = \bigoplus_{k=1}^{n} m_j(\emptyset)$

or

$$a_n(j) \leq a_{n+1}(j)$$

plus le nombre d'experts est important plus le conflit peut être proche de 1

> Supprimer la non-idempotence

La combinaison conjonctive sur des fonctions à support simple A^{w1} et A^{w2} est $A^{w1.w2}$

Toute fonction de masse non dogmatique peut s'écrire de manière unique comme la combinaison conjonctive de fonctions à support simple généralisées $w \in]0, +\infty[$

La règle conjonctive prudente sur les fonctions à support simple A^{w1} et A^{w2} est donnée par $A^{\min(w1,w2)}$

et se généralise sur les fonctions de masse non-dogmatiques

Remarque : absence d'élément neutre

intéressante si peu de conflit

> Supprimer le conflit

$$\forall X \in 2^{\Theta}$$

$$m_{\mathrm{Dis}}(X) = \sum_{A \cup B = X} m_1(A) m_2(B).$$

- **Élargit les éléments focaux donc perte de spécificité : En pratique très problématique**

- **Intéressant si on ne sait pas modéliser les fiabilités des sources, leurs ambiguïtés et imprécisions**

> Hypothèse du monde fermé : fausse

TBF (*Transferable Belief Functions*) en monde ouvert

	A	B	C	$\ominus$

$$m(A) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = A \neq \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

$$m(\emptyset) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

***k* est affecté à l'ensemble vide**

Décision pignistique : Retour en monde fermé par normalisation du conflit

> Hypothèse du monde fermé : fausse

La technique du *hedging* consiste à ajouter un élément inconnu *e* au cadre de discernement pour rester en monde fermé

***i.e.*. que l'on suppose que le conflit vient du manque d'exhaustivité**

$\emptyset$	A	B	C		$\ominus$

$$m(A \cup e) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = A \neq \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

$$m(e) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

> Répartir le conflit

Le conflit total : *k*

Yager 1987, Inagaki 1991, Lefèvre 2002, Florea 2006

Le conflit partiel

Dubois et Prade 1988, Smarandache et Dezert 2005, Martin et Osswald 2006 et 2007

> Conflit est issu de l'ignorance

Yager propose un modèle en monde fermé où la mesure de conflit est affectée au cadre de discernement total θ

$\emptyset$	A	B	C	

$$m(A) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = A \neq \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

Calcul de *m*(θ) :

$$m(\Theta) = 1 - \sum_{A \subseteq D} \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = A \neq \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

puis la modifie

$$m(\Theta) = m(\Theta) + \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

> Répartition du conflit total de manière générale

Une fois le conflit calculé $m_{\text{conj}}(\emptyset)$ il est réparti selon une fonction de poids

$$\forall X \in 2^\Theta \qquad m_c(X) = m_{\text{conj}}(X) + w(X) m_{\text{conj}}(\emptyset)$$

$$\sum_{X \in 2^\Theta} w(X) = 1$$

	A	B	$A \cup B$	C	$A \cup C$	$B \cup C$	Θ

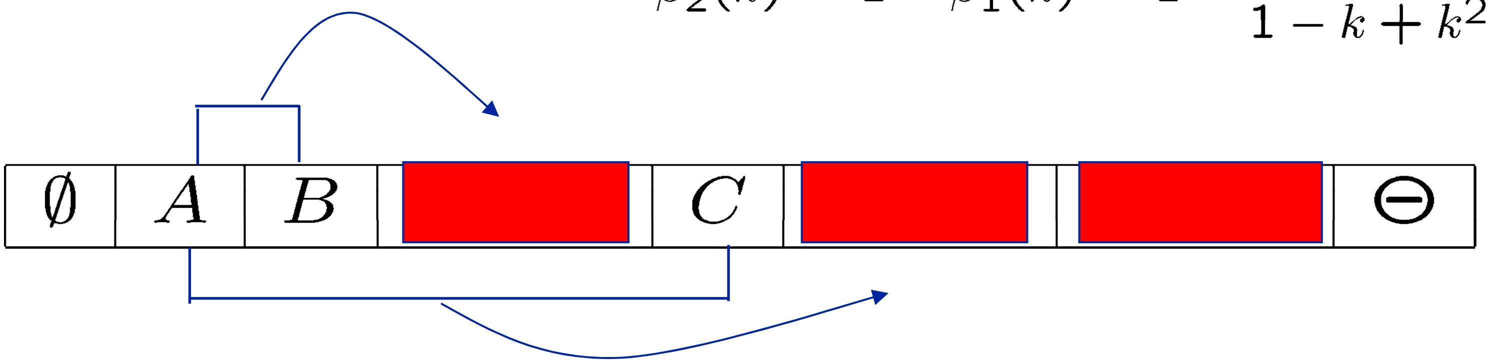
> Répartition du conflit total de manière générale : règle mixte

On pose $k = m_{\text{conj}}(\emptyset)$

$$\forall X \in 2^{\Theta} \qquad m_{\text{Flo}}(X) = \beta_1(k) m_{\text{Dis}}(X) + \beta_2(k) m_{\text{Conj}}(X)$$

Les poids peuvent être choisi de façon a avoir une symétrie pour *k*=1/2

$$\beta_1(k) = \frac{k}{1-k+k^2},$$
$$\beta_2(k) = 1 - \beta_1(k) = 1 - \frac{k}{1-k+k^2}.$$

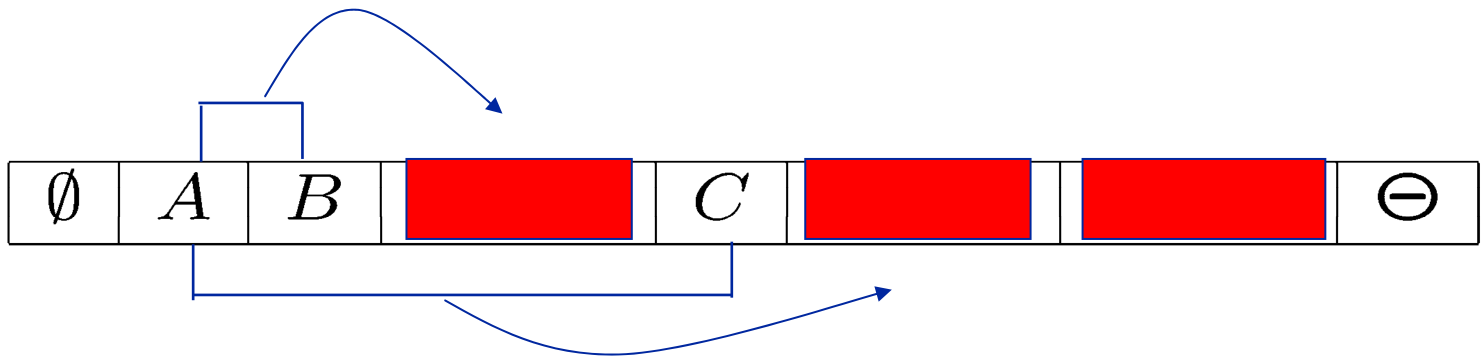


> Conflit partiel sur ignorance partielle

Compromis des approches conjonctives et disjonctives

$$m_{\mathrm{DP}}(X) = \sum_{A \cap B = X} m_1(A)m_2(B) + \sum_{\substack{A \cup B = X \\ A \cap B = \emptyset}} m_1(A)m_2(B).$$

Répartition fine du conflit



> Répartition du conflit partiel de manière générale : règle mixte

Extension de la règle de Florea et/ou Dubois et Prade à partir de poids sur le conflit partiel

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{Mix}}(X) &= \sum_{A\cup B=X} \delta_1 m_1(A) m_2(B) \\ &+ \sum_{A\cap B=X} \delta_2 m_1(A) m_2(B). \end{aligned}$$

On retrouve la règle de Dubois et Prade avec

$$\delta_1(A,B) = 1 - \delta_2(A,B) = \mathbb{1}_{A\cap B=\emptyset}$$

Prise en compte de la spécificité des réponses

$$\delta_1(A,B) = 1 - \frac{|A\cap B|}{\min(|A|,|B|)},$$

> Conflit partiel réparti proportionnellement

PCR6 : Redistribution du conflit partiel proportionnellement sur les éléments qui l'engendrent

on ajoute à la combinaison conjonctive :

$m_1^2(A)m_2(B)/(m_1(A)+m_2(B))$ à $m(A)$ et

$m_1(A)m_2^2(B)/(m_1(A)+m_2(B))$ à $m(B)$

	$\emptyset$	A	B	Θ
m_1	0	0.6	0	0.4
m_2	0	0.3	0.2	0.5
m_c	0.12	0.6	0.08	0.2
m_{PCR5}	0	0.69	0.11	0.2

$$m_{PRC6}(X) = m_{conj}(X) + \sum_{i=1}^{M} m_i(X)^2 \sum_{\substack{\overset{M-1}{\underset{k=1}{\cap}} Y_{\sigma_i(k)} \cap X \equiv \emptyset \\ (Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)}) \in (D^\Theta)^{M-1}}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})}{m_i(X) + \sum_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})} \right)$$

$$\begin{cases} \sigma_i(j) = j & \text{if } j < i, \\ \sigma_i(j) = j+1 & \text{if } j \geq i, \end{cases}$$

> PCR affaiblie : DPCR

Les conflits partiels sont répartis sur les éléments qui les engendrent proportionnellement et sur les ignorances partielles selon un facteur d'affaiblissement $\alpha \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{DPCR}}(X) &= m_{\mathrm{Conj}}(X) \\
&+ \sum_{\substack{Y \in 2^{\Theta},\\ X \cap Y = \emptyset}} \alpha \left(\frac{m_1(X)^2 m_2(Y)}{m_1(X)+m_2(Y)} + \frac{m_2(X)^2 m_1(Y)}{m_2(X)+m_1(Y)} \right) \\
&+ \sum_{\substack{Y_1 \cup Y_2 = X\\ Y_1 \cap Y_2 = \emptyset}} (1-\alpha) m_1(Y_1) m_2(Y_2),
\end{aligned}
$$

> PCR affaiblie : choix du facteur

- A partir d'une fonction de conflit

$$f_i(Y_1, ..., Y_M) = \frac{\sum_{j=1}^{M} 1\!\!1_{\{Y_j \cap Y_i = \emptyset\}}}{M(M-1)}$$

$$\alpha(Y_1, ..., Y_M) = 1 - \sum_{i=1}^{M} f_i(Y_1, ..., Y_M)$$

Exemple

	A	B	$A \cup C$	Θ
Expert 1		0	0	0.3
Expert 2	0		0	0.5
Expert 3	0	0		0.4

il n'y a pas de conflit entre A et $A \cup C$ mais le facteur est identique

> PCR affaiblie : choix du facteur

- A partir d'une fonction de non conflit à valeur dans $\left[0, \frac{1}{M}\right]$

$$
\begin{aligned}
\alpha_i(Y_1, ..., Y_M) &= \frac{1}{M} - f_i(Y_1, ..., Y_M) \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{M} \mathbb{1}_{\{Y_j \cap Y_i \neq \emptyset\}}}{M(M-1)}.
\end{aligned}
$$

> PCR affaiblie : choix du facteur

- A partir d'une fonction de non conflit $\alpha_i(X, Y_{\sigma_i(1)}, \ldots, Y_{\sigma_i(M-1)})$

$$m_{\mathrm{DPCR}}(X) = m_{\mathrm{Conj}}(X) + \sum_{i=1}^{M} m_i(X)^2 \sum_{\substack{\bigcap_{k=1}^{M-1} Y_{\sigma_i(k)} \cap X = \emptyset \\ (Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)}) \in (2^\Theta)^{M-1}}} \alpha_i \left(\frac{\prod_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})}{m_i(X) + \sum_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{Y_1 \cup \ldots \cup Y_M = X \\ Y_1 \cap \ldots \cap Y_M = \emptyset}} (1 - \sum_{i=1}^{M} \alpha_i) \prod_{j=1}^{M} m_j(Y_j),$$

> PCR affaiblie : choix du facteur

Avec λ **donné pour** $\alpha_i \neq 0$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{M} \alpha_i}{< \alpha, \gamma >}$$

$$\gamma_i = \frac{m_i(X)}{m_i(X) + \sum_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})}$$

> PCR mixte et affaiblie : MDPCR

$$m_{\mathrm{MDPCR}}(X) = \sum_{\substack{Y_1 \cup Y_2 = X, \\ Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset}} \delta m_1(Y_1) m_2(Y_2)$$

$$+ \sum_{\substack{Y_1 \cap Y_2 = X, \\ Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset}} (1-\delta) m_1(Y_1) m_2(Y_2)$$

$$+ \sum_{\substack{Y \in 2^\Theta, \\ X \cap Y = \emptyset}} \alpha \left(\frac{m_1(X)^2 m_2(Y)}{m_1(X) + m_2(Y)} + \frac{m_2(X)^2 m_1(Y)}{m_2(X) + m_1(Y)} \right),$$

$$+ \sum_{\substack{Y_1 \cup Y_2 = X \\ Y_1 \cap Y_2 = \emptyset}} (1-\alpha) m_1(Y_1) m_2(Y_2).$$

Conclusions et Perspecives

- Intérêt des fonctions de croyance par rapport aux approches Bayésiennes
- Combinaison :
  - Beaucoup de règles de combinaison, trop ?
  - Gestion fine du conflit et de la spécificité des réponses des experts semble essentielle

- Fonctions de croyance dans le continu
- Temps de calcul exponentiel