Construction d'une fonction de croyance consonante associée à une densité de probabilité multimodale

Constructing of a consonant belief function linked to a multimodal probability density

Pierre-Emmanuel Doré   Arnaud Martin   Ali Khenchaf
E3I2-EA3876/ENSIETA

2 rue François Verny, 29806 BREST Cedex 09
Pierre-Emmanuel.Dore,Arnaud.Martin,Ali.Khenchaf@ensieta.fr

Résumé :

Dans cet article, nous généralisons l'approche de Ph. Smets sur les fonctions de croyance continues. Au lieu de n'affecter des croyances élémentaires qu'aux ensembles connexes de $\overline{\mathbb{R}}^n$ (l'ensemble de dimension n des réels étendus aux bornes infinies), nous allons travailler avec des éléments de la tribu des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}^n$. Pour rester avec des fonctions facilement manipulables, nous décidons de travailler avec des fonctions de croyance auxquelles on peut associer des fonctions d'indices parcourant l'ensemble des éléments focaux. Nous concentrant sur les fonctions de croyance dites consonantes, nous exhibons quelques unes de leurs propriétés. Elles nous servent à définir des fonctions de croyance associées à des densités de probabilité multimodales. Nous appliquons les résultats obtenus au calcul d'une fonction de croyance consonante associée à un mélange de gaussiennes.

Mots-clés :

Fonction de croyance continue, densité de probabilité multimodale, fonction de croyance consonante.

Abstract:

In this paper, we generalize the approach of Ph. Smets about the continuous belief functions. Instead of having only connected sets in the focal set, we put basic belief assignement on elements of the Borel sigma-algebra of $\overline{\mathbb{R}}^n$ (the extended real space set of dimension n). We decide to study belief function with an index function which describes all the focal sets. We focus on the consonant belief functions and we show some of their properties. They are useful to define belief function associated to multimodal probability density. We apply the obtained results to compute a consonant belief function linked to a gaussian mixture.

Keywords:

Continuous belief function, multimodal probability density, consonante belief function.

1 Introduction

La théorie des fonctions de croyance constituent un formalisme riche pour décrire les imperfections des données véhiculées par des sources d'informations. Elles sont largement utilisées pour faire de la classification en fusionnant les décisions prises sur des classes discrètes en sortie de différents classifieurs. Ces classifieurs peuvent prendre en entrée des données issues de capteurs. C'est donc à la suite de l'estimation de paramètres continus qu'ils prennent une décision. Pouvoir estimer ces paramètres continus en modélisant les informations transmises par un capteur à l'aide des fonctions de croyance pourrait aider à concevoir de meilleurs classifieurs automatiques. Jusqu'à récemment, cela semblait impossible car les fonctions de croyance telles qu'elles avaient été développées rendaient impossibles les calculs sur des cadres de discernement de cardinalité trop grande. Depuis peu, des travaux traitant la question de la représentation des fonctions de croyance sur les nombres réels sont apparus. Plusieurs approches ont été proposées [13, 6, 7, 11]. Dans la suite de notre exposé, nous allons nous intéresser à la démarche suivie dans [13, 7, 11]. Elle permet entre autre d'associer des fonctions de croyance à des probabilités. On retrouve la même idée dans la théorie des possibilités dont plusieurs travaux (parmi lesquels [5]) portent sur la construction d'une fonction de possibilité à partir d'une probabilité. Toutefois, dans ces études sur les fonctions de croyance, des masses ne sont affectées qu'à des ensembles connexes de $\overline{\mathbb{R}}^n$ (l'ensemble de dimension n des réels étendus aux bornes infinies). Ce choix a été fait pour travailler avec des objets faciles à manipuler. Malheureusement, ne travailler qu'avec des fonctions de croyance dont les éléments focaux sont des connexes fermés nous limite à ne considérer qu'une infime partie des fonctions de croyance existantes. Dans le cas de fonctions de croyance associées à une densité de probabilité multimodale, une telle approche peut-être critiquée car la modélisation de l'information sur une union de fermés disjoints semble être plus adaptée. Il est donc nécessaire d'adapter le formalisme permettant de décrire les fonctions de croyance afin de modéliser des croyances sur des espaces de travail plus riches. dans

Dans la suite de cet article, après un bref rappel des résultats connus sur les fonctions de croyance classiques (*cf.* section 2), nous allons présenter l'approche choisie par Smets [11] pour modéliser les fonctions de croyance continues (*cf.* section 3). Ensuite, nous allons proposer une nouvelle manière de formaliser les fonctions de croyance afin que leurs éléments focaux appartiennent à $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$, la tribu des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}^n$ (*cf.* section 4). Pour travailler avec des objets facilement manipulables, nous nous concentrerons, comme dans [11, 1, 7], sur les fonctions de croyance consonantes. Nous les utiliserons afin de représenter l'information véhiculée par une densité de probabilité multimodale. Finalement, nous appuyant sur les résultats décrits dans [1], nous comparons cette nouvelle approche avec celle préconisée dans [11, 1] en déterminant une fonction de croyance consonante associée à un mélange de gaussiennes (*cf.* dans la section 5).

2 Fonctions de croyance discrètes sur $\overline{\mathbb{R}}^n$

De manière classique [2, 8, 9], un cadre de discernement Ω est un ensemble fini d'éléments disjoints. On note 2^Ω, l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de Ω. Les fonctions de croyance m^Ω permettent donc de modéliser une information sur tous les éléments de 2^Ω. On appelle élément focal tout élément A de 2^Ω dont la masse associée $m^\Omega(A)$ est non nulle. Une fonction de masse vérifie la condition de normalisation $\sum_{A\subseteq\Omega} m^\Omega(A) = 1$. On peut lui associer les fonctions suivantes définies pour tout $X \subseteq \Omega$ par :

- fonction de croyance :
  $bel^\Omega(X) = \sum_{A\subseteq X, A\neq\emptyset} m^\Omega(A)$
- fonction de plausibilité :
  $pl^\Omega(X) = \sum_{A\subseteq\Omega, A\cap X\neq\emptyset} m^\Omega(A)$
- fonction de communalité :
  $q^\Omega(X) = \sum_{X\subseteq A} m^\Omega(A)$
- probabilité pignistique [10] :
  $BetP^\Omega(X) = \sum_{A\subseteq\Omega, A\cap X\neq\emptyset} \frac{|A\cap X|\cdot m^\Omega(A)}{|A|\left(1-m^\Omega(\emptyset)\right)}$

En combinant m_1^Ω et m_2^Ω selon la règle conjonctive, on obtient $m_{1 \textcircled{\cap} 2}^\Omega$ telle que pour tout $A \subseteq \Omega$:

$$m_{1 \textcircled{\cap} 2}^\Omega(A) = \sum_{X\cap Y=A} m_1^\Omega(X)\, m_2^\Omega(Y)$$

Partant de cette définition des fonctions de croyance, on peut modéliser une croyance discrète sur $\overline{\mathbb{R}}^n$ à l'aide d'une fonction de masse m^Θ. Le cadre de discernement Θ est constitué d'une famille dénombrable d'éléments disjoints de $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$. L'ensemble des éléments focaux de m^Θ (*i.e.* les parties A de 2^Θ telles que $m^\Theta(A) \neq 0$), noté $\mathcal{F}\left(m^\Theta\right)$, est donc une famille dénombrable d'éléments de 2^Θ. Ces éléments peuvent donc être notés F_i, i appartenant à $\mathbb{N}$. m^Θ vérifie la condition de normalisation $\sum_i m^\Theta(F_i) = 1$. Il en découle l'expression des fonctions associées. Pour tout A de $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$ on a :

- $bel^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}(A) = \sum_{F_i\subseteq A} m^\Theta(F_i)$
- $pl^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}(A) = \sum_{F_i\cap A\neq\emptyset} m^\Theta(F_i)$
- $q^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}(A) = \sum_{A\subseteq F_i} m^\Theta(F_i)$
- $BetP^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}(A) = \sum_{A\cap Fi} \frac{m^\Theta(A)\,|A\cap F_i|}{|A|\left(1-m^\Theta(\emptyset)\right)}$

Telles qu'introduites, ces fonctions de croyance ne diffèrent en rien de celles décrites précédemment. Toutes les propriétés usuelles sur les fonctions de croyance discrètes leur sont applicables.

Ces fontions étant discrètes, elles ne sont pas adaptées à l'estimation de paramètres continus. Tenter de modéliser des fonctions de croyance à l'aide de fonctions continues est une manière de résoudre ce problème.

3 Fonctions de croyance continues ayant pour éléments focaux des connexes de $\overline{\mathbb{R}}^n$

Pour modéliser les informations élémentaires véhiculées par une fonction de croyance continue, à l'instar des probabilités, il est nécessaire d'introduire la notion de densité de masse élémentaire $m^{\overline{\mathbb{R}}^n}$ (*cf.* [13, 11]). Ces densités de masse élémentaires, au lieu de s'exprimer sur des singletons de $\overline{\mathbb{R}}^n$, affectent une densité à des ensembles constitués à partir d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}^n$. Aussi, contrairement aux probabilités, les fonctions de croyance ne vérifient pas la propriété d'additivité. Pour pouvoir utiliser facilement les fonctions de croyance continues, il est nécessaire de se restreindre à celles dont les éléments focaux peuvent être facilement décrits.

3.1 Cas où les éléments focaux sont des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}^n$

Ph. Smets [11] propose de modéliser une croyance continue sur $\overline{\mathbb{R}}$ en affectant des densités de masse aux intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$. Concentrant ensuite ses efforts sur les fonctions de masse dont les éléments focaux sont des fermés (on peut modéliser de même des semi-ouverts ou des ouverts), il associe à une densité de masse $m^{\overline{\mathbb{R}}}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, une densité de probabilité $f^{\mathcal{T}}$ sur $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$ (par convention, $[x, y] = \emptyset$ si $y < x$). Par analogie avec les fonctions de croyance discrètes, on obtient alors :

- $bel^{\overline{\mathbb{R}}}([a, b]) = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=x}^{y=b} f^{\mathcal{T}}(x, y)\, dy\, dx$
- $pl^{\overline{\mathbb{R}}}([a, b]) = \int_{x=-\infty}^{x=b} \int_{y=\max(a,x)}^{y=+\infty} f^{\mathcal{T}}(x, y)\, dy\, dx$
- $q^{\overline{\mathbb{R}}}([a, b]) = \int_{x=-\infty}^{x=a} \int_{y=b}^{y=+\infty} f^{\mathcal{T}}(x, y)\, dy\, dx$

Si l'on veut combiner deux densités de masse $m_1^{\overline{\mathbb{R}}}$ et $m_2^{\overline{\mathbb{R}}}$, en utilisant la règle de combinaison conjonctive, on obtient la densité de masse $m_{1 \circledcirc 2}^{\overline{\mathbb{R}}}$. Le produit $m_1^{\overline{\mathbb{R}}}(A) \cdot m_2^{\overline{\mathbb{R}}}(B)$ est affecté à $m_{1 \circledcirc 2}^{\overline{\mathbb{R}}}(A \cap B)$. On a pour tout intervalle fermé A de $\overline{\mathbb{R}}$: $q_{1 \circledcirc 2}^{\overline{\mathbb{R}}}(A) = q_1^{\overline{\mathbb{R}}}(A) \cdot q_2^{\overline{\mathbb{R}}}(A)$. Ceci n'est qu'une partie des résultats obtenus par Ph. Smets [11]. On peut facilement étendre cette modélisation à $\overline{\mathbb{R}}^n$.

3.2 Cas d'une densité de masse consonante

L'étude des fonctions de croyance consonantes fait l'objet de différents articles [7, 11, 1]. Les éléments focaux d'une telle fonction sont décrits comme constituant une famille d'ensembles emboités de $\overline{\mathbb{R}}^n$. Constatant que pour tout A et B, élements focaux de $m^{\overline{\mathbb{R}}^n}$, $A \subset B \Longleftrightarrow q^{\overline{\mathbb{R}}^n}(B) < q^{\overline{\mathbb{R}}^n}(A)$, il paraît naturel d'associer à tout indice y un élément $F(y) \in \mathcal{F}\left(m^{\overline{\mathbb{R}}^n}\right)$ tel que $y < y'$ implique $F(y) \subseteq F(y')$. Ainsi formalisées, ces fonctions sont faciles à manipuler.

3.3 Isopignistique de moindre engagement d'une probabilité unimodale

L'estimation d'un paramètre se fait à partir de données issues de différents capteurs. Les informations transmises par des capteurs sont souvent modélisées par des densités de probabilité. Pour fusionner ces informations avec des fonctions de croyance continues, il est nécessaire d'associer à une densité de probabilité une densité de masse. Ph. Smets introduit dans [10] le concept de transformation pignistique. À toute densité de masse $m^{\overline{\mathbb{R}}^n}$ correspond une densité de probabilité $Betf$ et donc une probabilité dite pignistique $BetP$. Par exemple pour tout intervalle $[a, b]$ de $\overline{\mathbb{R}}$, on a d'après [11] :

$$BetP([a, b]) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=x}^{y=\infty} \frac{y \wedge b - x \vee a}{y - x} f^{\mathcal{T}}([x, y])\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

Ainsi, à une pignistique $BetP$ correspond un ensemble de fonctions de croyance noté $\mathscr{B}Iso(BetP)$. La question est de savoir laquelle choisir dans cet ensemble. Plusieurs travaux traitent la question de l'ordonnancement des fonctions de croyance continues [11, 3]. Ph. Smets [11] a retenu le critère du moindre engagement. L'idée est simple, si l'on doit choisir une fonction de croyance parmi plusieurs, il faut prendre celle qui transmet l'information engageant le moins la source. Si l'on prend la maximisation de la fonction de communalité comme critère, on a alors la relation d'ordre partiel : $\left(\forall A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n, q_1^{\overline{\mathbb{R}}^n}(A) \leq q_2^{\overline{\mathbb{R}}^n}(A)\right) \Longrightarrow \left(m_1^{\overline{\mathbb{R}}^n} \sqsubseteq_q m_2^{\overline{\mathbb{R}}^n}\right)$. Ph. Smets [11] a démontré que la densité de masse de moindre engagement associée à une densité de probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$ dont le graphe est en forme de cloche est consonante et vaut pour tout intervalle $[a,b]$ de $\overline{\mathbb{R}}$

$$m^{\overline{\mathbb{R}}}([a,b]) = (\gamma(b) - b)\,\frac{dBetf(b)}{db}\,\delta(a - \gamma(b))$$

avec ν le mode de $Betf$ (la droite d'équation $x = \nu$ est l'axe de symétrie de la courbe), b dans $[\nu, \infty]$, et $\gamma(b)$ dans $[-\infty, \nu]$ tel que $Betf(b) = Betf(\gamma(b))$. Ainsi, la densité de moindre engagement associée a dans ce cas pour éléments focaux des boules de $\overline{\mathbb{R}}^n$ emboîtées. Ces éléments sont définis par les α-coupes[1] de $Betf$. Dans [1], F. Caron *et al.* ont donné l'expression des densités de masse de moindre engagement associées aux gaussiennes de $\mathbb{R}^n$. Ils ont démontré que les éléments focaux de ces densités de masse sont les ellipsoïdes de confiance des gaussiennes associées.

Ces approches de modélisation de fonctions de croyance continues sur des réels ont toutes pour idée sous-jacente la mise en place d'un indice continu pour décrire l'ensemble des éléments focaux d'une fonction de croyance. Toutefois, elles se restreignent à représenter des ensembles fermés de $\overline{\mathbb{R}}^n$. Premièrement, cette restriction limite la généralité de nos propos. Deuxièmement, les α-coupes d'une fonction multimodale ne sont pas des connexes (*cf.* exemple 2 dans le section 5). Si notre cadre de discernement est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, cela nous empêche donc de calculer la densité de masse de moindre engagement isopignistique associée à une densité de probabilité multimodale.

[1]Les α-coupes d'une fonction f de $\overline{\mathbb{R}}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ sont les ensembles $\{y \in \overline{\mathbb{R}}^n | f(y) \geq \alpha\}$.

4 Fonctions de croyance continues ayant pour éléments focaux des éléments de $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$

Utiliser un indice pour représenter l'ensemble des éléments focaux d'une fonction de croyance est pratique lorsque l'on veut les manipuler de manière efficace. Dans cette section, nous allons présenter une approche de la notion de fonction de croyance continue sur des réels fondée sur la définition d'une fonction décrivant l'ensemble des éléments focaux.

4.1 Mesure crédale

On cherche à caractériser une croyance sur $\overline{\mathbb{R}}^n$, $\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$. L'ensemble des éléments focaux associés à cette croyance est noté $\mathcal{F}\left(\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right)$. Si on peut lui associer une application f^I surjective dite fonction indice telle que :

$$\begin{array}{llll} f^I : & I \in \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^l\right) & \longrightarrow & \mathcal{F}\left(\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right) \\ & y & \longmapsto & f^I(y) \end{array}$$

On peut considérer que $\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ est une mesure positive sur l'espace mesurable $(I, \mathcal{B}(I))$ qui vérifie la condition de normalisation $\displaystyle\int_I d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \leq 1$. Si pour tout A dans $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$, les ensembles définis ci-dessous sont des boréliens :

- $F_{\subseteq A} = \{y \in I | f^I(y) \subseteq A\}$
- $F_{\cap A} = \{y \in I | \left(f^I(y) \cap A\right) \neq \emptyset\}$
- $F_{\supseteq A} = \{y \in I | A \subseteq f^I(y)\}$

On nomme l'espace mesuré $\left(I, \mathcal{B}(I), \mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right)$ *espace crédal* et la mesure positive associée *mesure crédale*. Si on peut associer un espace crédal à une croyance sur $\overline{\mathbb{R}}^n$, on peut définir pour tout $A \in \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$ les fonctions de croyance suivantes :

– $bel^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F_{\subseteq A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$
– $pl^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F_{\cap A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$
– $q^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F_{\supseteq A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$

On note que l, la dimension de I (l'espace d'indices), ne dépend pas de n, la dimension de l'espace sur lequel on exprime une croyance. Par exemple, dans [11], Ph. Smets propose d'utiliser des parties de $\mathbb{R}^2$ pour décrire les éléments focaux de croyance exprimée sur $\mathbb{R}$ alors que dans [1], F. Caron *et al.* utilisent un espace d'indices de dimension 1 pour décrire les éléments focaux d'une fonction de croyance gaussienne sur $\mathbb{R}^n$.

Lorsque plusieurs sources d'information sont disponibles, il faut être en mesure de les combiner. Une règle souvent utilisée est la règle de combinaison conjonctive. On démontre le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit* $\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ *et* $\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ *deux mesures crédales, lorsqu'on les combine en utilisant la règle de combinaison conjonctive, on obtient une mesure crédale* $\mu_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ *qui vérifie l'égalité :*

$$q_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = q_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \cdot q_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A)$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$. On a :

$$q_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \cdot q_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F^1_{\supseteq A}} d\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_1) \cdot \int_{F^2_{\supseteq A}} d\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_2)$$

D'après le théorème de Fubini, on a :

$$q_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \cdot q_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F^1_{\supseteq A}} \int_{F_{2 \supseteq A}} d\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_1)\, d\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_2) = \int_{F^1_{\supseteq A}} \int_{F_{2 \supseteq A}} d\left(\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)} \otimes \mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right)(y_1, y_2)$$

Soit l'application $f^{I_{1 \circledcirc 2}}$ telle que :

$$\begin{aligned} f^{I_{1 \circledcirc 2}} : I_{1 \circledcirc 2} = I_1 \times I_2 &\longrightarrow \mathcal{F}\left(\mu_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right) \\ y = (y_1, y_2) &\longmapsto f^{I_1}(y_1) \cap f^{I_2}(y_2) \end{aligned}$$

On a :
– $F^{1 \circledcirc 2}_{\subseteq A} = \left(F^1_{\subseteq A} \times I_2\right) \cup \left(I_1 \times F^2_{\subseteq A}\right)$
– $F^{1 \circledcirc 2}_{\cap A} = F^1_{\cap A} \times F^2_{\cap A}$
– $F^{1 \circledcirc 2}_{\supseteq A} = F^1_{\supseteq A} \times F^2_{\supseteq A}$

Comme ce sont des boréliens, elle vérifie les conditions pour être une fonction indice. On lui associe la mesure crédale $\mu_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ telle que :

$$\mu_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)} = \mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)} \otimes \mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$$

On a alors :

$$q_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F^{1 \circledcirc 2}_{\supseteq A}} d\mu_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$$

D'où l'égalité :

$$q_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = q_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \cdot q_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \qquad \square$$

Soit f^{I_1} et f^{I_2}, deux fonctions indices associées aux mesures crédales $\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ et $\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$. Supposons φ, une fonction surjective de I_1 dans I_2 telle que $\varphi(y_1) = y_2$ implique $f^{I_1}(y_1) = f^{I_2}(y_2)$. Soit $H_1 \subset I_1$ et $H_2 \subset I_2$ deux boréliens. Si les relations $\varphi(H_1) = H_2$ et $\varphi^{-1}(H_2) = H_1$ impliquent $\int_{H_1} d\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_1) = \int_{H_2} d\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_2)$, alors les deux croyances associées aux mesures crédales sont identiques.

Théorème 2. *Soit* f^{I_1} *et* f^{I_2}*, deux fonctions indices associées aux densités de masses* $\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ *et* $\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$*. Supposons* φ*, une fonction de changement de variable telle que* $\varphi(y_1) = y_2$ *implique* $f^{I_1}(y_1) = f^{I_2}(y_2)$*. Ces densités de masse sont identiques si* $d\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_1) = |det(\varphi'(y_1))|\, d\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(\varphi(y_1))$

4.2 Cas d'une mesure crédale consonante

Les mesures crédales consonantes constituent un cas particulier de mesures crédales. En effet, on peut leur associer une fonction indice f^I_{cs} bijective telle que :

$$\begin{aligned} f^I_{cs} : \quad I \subset \overline{\mathbb{R}}^+ &\longrightarrow \mathcal{F}\left(\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right) \\ y &\longmapsto f^I_{cs}(y) \end{aligned}$$

et $y_2 < y_1 \Longleftrightarrow f^I_{cs}(y_1) \subset f^I_{cs}(y_2)$

Grâce à la fonction indice f^I_{cs}, on peut facilement exprimer la valeur des fonctions de croyance. Par exemple, si l'espace d'indices est un intervalle, *ie.* $I=[0,y_{\max}]$, on a :

- $bel^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \displaystyle\int_{y_{\max}}^{y_1} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$ où y_1 est le plus petit élément de $F_{\subseteq A}$.
- $pl^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \displaystyle\int_{y_1}^{0} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$ où y_1 est le plus grand élément de $F_{\cap A}$.
- $q^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(B) = \displaystyle\int_{y_1}^{0} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$ où y_1 est le plus grand élément de $F_{\supseteq A}$.

On remarque que la combinaison conjonctive de deux mesures crédales consonantes n'est pas forcément consonante. Cela peut poser des problèmes pour fusionner un grand nombre d'informations ou lors de la fusion dynamique. Une solution peut être de substituer la mesure crédale résultante par une mesure crédale iso-pignistique consonante telle qu'on le présente dans la section suivante.

4.3 Mesure crédale consonante associée à une probabilité multimodale

On suppose que les différentes sources d'information s'expriment à l'aide de distributions de probabilité multimodales. Si l'on décide de fusionner ces différentes sources d'information à l'aide de la théorie des fonctions de croyance, il est nécessaire d'associer à ces probabilités des fonctions de croyance. Dans le cas d'une mesure crédale $\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$, la transformation pignistique s'écrit pour tout ensemble A de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$:

$$BetP\,(A) = \int_{F_{\cap A}} \frac{\lambda\left(A \cap f^I(y)\right)}{\lambda\left(f^I(y)\right)} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$$

On remarque dans ce cas que $\lambda\,(B)$ est la mesure de Lebesgue de l'hypervolume de B, élément de $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$ (par convention, on décide que $0/0 = 1$). Soit une distribution de probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}^n$ dont la densité de probabilité $Betf$ est continue. On a $Betf\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right) = [0,\alpha_{\max}] = I$. Ainsi on obtient la fonction indice f^I_{cs} qui à tout α de I associe l'α-coupe $f^I_{cs}(\alpha)$. On peut à partir d'elle construire une mesure crédale consonante $\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ dont les éléments focaux sont les α-coupes de $Betf$.

Théorème 3. *Soit une densité de probabilité $Betf$ continue. On peut lui associer une mesure crédale $\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ consonante dont les éléments focaux sont les α-coupes de $Betf$. On a alors :*

$$d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\,(\alpha) = \lambda\left(f^I_{cs}(\alpha)\right) d\lambda\,(\alpha)$$

Démonstration. Partons de l'expression de $BetP\left(f^I_{cs}\,(\alpha)\right)$. Grâce à la relation donnée par la transformation pignistique, on a l'égalité :

$$BetP\left(f^I_{cs}\,(\alpha)\right) = \int_{\alpha_{max}}^{0} \frac{\lambda\left(f^I_{cs}\,(\alpha) \cap f^I_{cs}(y)\right)}{\lambda\left(f^I_{cs}(y)\right)} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$$

Notons ν la mesure telle que :

$$\lambda\left(f^I_{cs}(\alpha)\right) = \int_{\alpha_{max}}^{\alpha} d\nu\,(y)$$

On a alors :

$$BetP\left(f^I_{cs}(\alpha)\right) = \int_{\alpha_{max}}^{\alpha} y d\nu\,(y).$$

En dérivant les deux expressions on obtient :

$$d\nu\,(\alpha) \int_{\alpha_{max}}^{\alpha} \frac{1}{\lambda\left(f^I_{cs}(y)\right)} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) = \alpha d\nu\,(\alpha)$$

D'où l'égalité :

$$\alpha = \int_{\alpha_{max}}^{\alpha} \frac{1}{\lambda\left(f^I_{cs}(y)\right)} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y)$$

En dérivant par rapport à α on a :

$$d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\,(\alpha) = \lambda\left(f^I_{cs}(\alpha)\right) d\lambda\,(\alpha) \qquad \square$$

Ainsi, on peut construire une mesure crédale consonante associée à une densité de probabilité continue. Nous allons appliquer ces résultats en construisant la mesure crédale consonante associée à un mélange de gaussiennes.

5 Illustrations

Pour illustrer nos propos, nous allons utiliser les différents théorèmes proposés pour construire les mesures crédales consonantes associées à des densités de probabilité continues. Tout d'abord, nous allons nous attacher à retrouver un résultat classique sur les fonctions de croyance continues : l'expression de la fonction de croyance consonante associée à une courbe gaussienne. Ensuite, nous étudierons la question de la fonction de croyance consonante associée à un mélange de gaussienne.

Exemple 1 (**Application à une courbe gaussienne**)**.** Soit une gausienne centrée réduite de densité de probabilité $Betf$. On définit $Betf^{-1}$, la fonction réciproque de $Betf$ restreinte à $\mathbb{R}^+$. Étant bijective, elle définit un changement de variable. D'après le théorème 3, on peut lui associer une mesure crédale consonante telle que :

$$d\mu^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}(\alpha) = \lambda\left(f_{cs}^{I}(\alpha)\right) d\lambda(\alpha)$$
$$= 2Betf^{-1}(\alpha)\, d\lambda(\alpha)$$

Comme $\alpha = Betf(x)$, on a :

$$d\lambda(\alpha) = Betf'(x)\, d\lambda(x) = xBetf(x)\, d\lambda(x)$$

La mesure crédale telle que :

$$d\tilde{\mu}^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}(x) = 2x^2 Betf(x)\, d\lambda(x)$$

Décrit donc la même croyance que $\mu^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}$ (*cf.* théorème 2). C'est le résultat annoncé par Ph. Smets dans[11].

On montre ainsi comment on peut appliquer les théorèmes 2 et 3 pour construire une mesure crédale consonante à partir de l'exemple d'une densité de probabilité gaussienne. Malheureusement, il n'est pas forcément facile d'exhiber la forme analytique de $BetP \circ f_{cs}^{I}$ et de $\lambda \circ f_{cs}^{I}$. Toutefois, on peut calculer une approximation numérique de $\lambda\left(f_{cs}(\alpha)\right)$. Nous allons mettre en pratique cette idée et déterminer une approximation numérique de la mesure crédale consonante associée à un mélange de gaussiennes. Le résultat obtenu sera comparé avec celui présenté dans [1].

Exemple 2 (**Application à un mélange de gaussiennes**)**.** Dans [1], F. Caron *et al.* donnent l'expression de la densité de masse de moindre engagement d'une gaussienne sur $\mathbb{R}^n$. Ils en déduisent alors la valeur des différentes fonctions de croyance associées, parmi lesquelles la plausibilité. Voulant ensuite construire une densité de masse associée à un mélange de gaussiennes $f = \sum_i \beta_i f_i$, ils décident de la créer de telle manière que sa plausibilité vérifie l'égalité $pl = \sum_i \beta_i pl_i$. On obtient bien ainsi une fonction de masse isopignistique à f, toutefois ses éléments focaux ne sont pas les α-coupes de f mais celles des f_i. La méthode choisie dans [1] ne permet donc pas de contruire une fonction de croyance consonante associée à f. Cela a une grosse influence sur les valeurs prises par pl. Partons du mélange de gaussiennes tracé sur la figure 1. On peut voir les approximations numériques des fonctions $BetP \circ f_{cs}^{I}$ et $\lambda \circ f_{cs}^{I}$ à la figure 2. Lorsqu'on regarde la plausibilité de la fonction de masse obtenue grâce au théorème 3, on remarque clairement qu'elle majore celle préconisée dans [1] et que sa forme est différente (*cf.* figure 3). On en déduit donc qu'elle implique un engagement moindre et que les résultats obtenus si l'on veut faire de la classification en utilisant le théorème de Bayes généralisé seront différents de ceux obtenus autrement.

6 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons proposé une extension de l'approche proposée dans [11, 13] pour modéliser des fonctions de croyance continues. Les résultats obtenus sont encourageants. En effet, nous avons montré qu'il est possible d'associer à une densité de probabilité multimodale continue, une fonction de croyance consonante facilement constructible. Il serait intéressant de démontrer que les fonctions de croyance ainsi générées sont celles de moindre engagement pour un ensemble isopignistique donné afin d'obtenir un résultat similaire à ceux de Ph. Smets dans [11]. De plus, l'étude du coût calculatoire d'une telle méthode et d'une comparaison avec l'approche discrète seraient utiles dans l'optique d'une implémentation pratique. Dans un premier temps, on peut imaginer appliquer ces résultats au problème de poursuite et classification (Joint Tracking and Classification) étudié dans [1, 12]. Comme les plausibilités que l'on associe aux mélanges de gaussiennes sont différentes, on risque d'avoir des performances différentes. On peut aussi utiliser les mesure crédales pour réaliser de la classification automatique et regarder si l'on obtient de bons résultats en terme de bonne classification. Une telle approche offre de nombreuses perspectives pour la mise en œuvre de méthode d'estimation de paramètres continus.

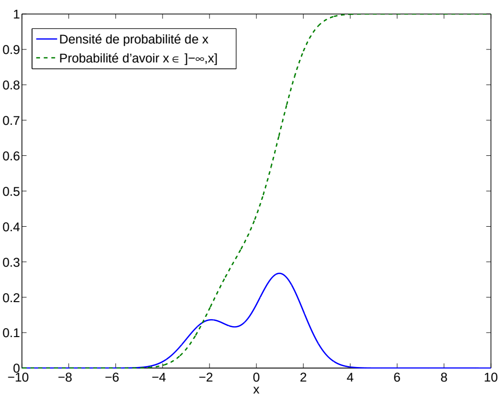

Figure 1 – Un mélange de gaussiennes

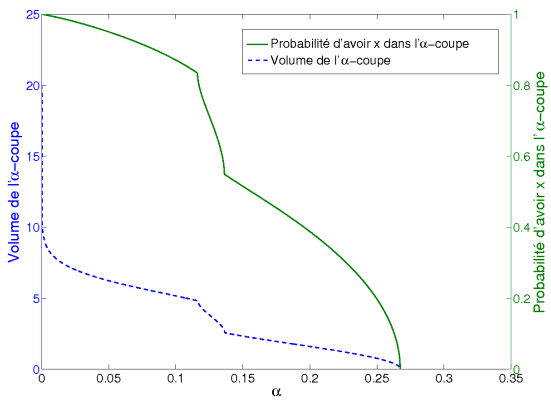

Figure 2 – Étude des α-coupes

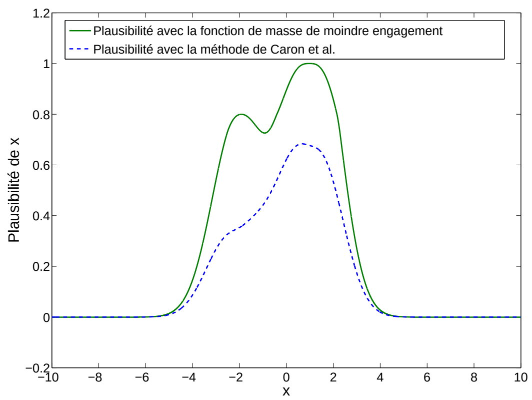

Figure 3 – Comparaison des plausibilités obtenues

Références

[1] F. Caron, B. Ristic, E. Duflos, and P. Vanheeghe. Least committed basic belief density induced by a multivariate Gaussian : Formulation with applications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48(2) : 419–436, 2008.

[2] A.P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38(2) : 325–339, 1967.

[3] T. Denoeux. Extending stochastic ordering to belief functions on the real line. *Information Sciences*, 179 : 1362–1376, 2009.

[4] D. Dubois and H. Prade. The principle of minimum specificity as a basis for evidential reasoning. *Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems on Uncertainty in knowledge-based systems. International Conference on Information table of contents*, pp. 75–84. Springer-Verlag London, UK, 1987.

[5] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris and H. Prade Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities. *Reliable computing*, 10(4) : pp. 273–297. Springer, 2004.

[6] L. Liu. A theory of gaussian belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 14(2-3) : 95–126, 1996.

[7] B. Ristic and Ph. Smets. Belief function theory on the continuous space with an application to model based classification. *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU*, pp. 4–9, 2004.

[8] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence.* Princeton University Press Princeton, NJ, 1976.

[9] Ph. Smets. The combination of evidence in the transferable belief model. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 12 : 447–458, 1990.

[10] Ph. Smets. Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty. *Uncertainty in Artificial Intelligence*, 5 : 29–39, 1990.

[11] Ph. Smets. Belief functions on real numbers. *International Journal of Approximate Reasoning*, 40(3) : 181–223, 2005.

[12] Ph. Smets and B. Ristic. Kalman filter and joint tracking and classification based on belief functions in the TBM framework. *Information Fusion*, 1(8) : 16–27, 2007.

[13] T.M. Strat. Continuous belief functions for evidential reasoning. *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence, University of Texas at Austin*, 1984.