

# HOMOGENÉISATION PAR UNE ANALYSE MULTIRÉSOLUTION

A. Martin

Mémoire du DEA  
Modélisation aléatoire et applications  
Université de Rennes 1  
1997-1998



Cette étude a été réalisée à l'aide du logiciel  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ . Les figures ont été composées à partir du logiciel GNUPLOT version 3.0, et les applications numériques ont été programmées en langage C ANSI.

Je remercie toute l'équipe du projet Sysdys pour son accueil et son aide pour l'élaboration de cette étude. Je remercie en particulier Fabien Campillo, chargé de recherche à l'INRIA et responsable du projet Sysdys, Frédéric Céro, chargé de recherche à l'INRIA, et Bruno Torrèsani, professeur à l'université de Provence.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Analyse multirésolution</b>	<b>2</b>
2.1	Cas général . . . . .	2
2.2	Exemples . . . . .	4
2.2.1	Exemple 1 . . . . .	4
2.2.2	Exemple 2 . . . . .	4
2.3	Procédure de réduction d'équations par une analyse multirésolution . . . . .	4
2.4	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	9
2.5	La procédure de réduction dans la base de Haar . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Homogénéisation</b>	<b>12</b>
3.1	Approche classique . . . . .	12
3.1.1	Méthode de la limite faible . . . . .	13
3.1.2	Méthode asymptotique des échelles multiples . . . . .	14
3.2	Homogénéisation par une analyse multirésolution . . . . .	16
<b>4</b>	<b>L'opérateur <math>-\nabla \cdot (a(x)\nabla)</math>.</b>	<b>20</b>
4.1	Cas unidimensionnel . . . . .	20
4.2	Cas bidimensionnel . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>26</b>
5.1	Applications de la méthode de réduction dans la base de Haar . . . . .	26
5.1.1	Exemple 1 . . . . .	26
5.1.2	Exemple 2 . . . . .	27
5.1.3	Exemple 3 . . . . .	27
5.2	Applications de la méthode de réduction de l'opérateur $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$ . . . . .	31
5.2.1	Exemple 4 . . . . .	32
5.2.2	Exemple 5 . . . . .	32
5.2.3	Exemple 6 . . . . .	34
5.2.4	Exemple 7 . . . . .	35
5.2.5	Exemple 8 . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
	<b>Annexe</b>	<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Quelques opérateurs dans la base de Haar</b>	<b>40</b>
<b>B</b>	<b>Quelques résultats classiques de l'homogénéisation</b>	<b>43</b>
<b>C</b>	<b>Algorithme de réduction de l'opérateur <math>-\nabla \cdot (a(x)\nabla)</math>.</b>	<b>45</b>

## Table des figures

1	Ex 1: Projection de $\alpha(t)$ et de $b(t)$ sur l'échelle -6. . . . .	27
2	Ex 1: Coefficients réduits sur l'échelle -4, après 2 niveaux de réduction. . .	28
3	Ex 1: Coefficients réduits sur l'échelle -4, après 2 niveaux de réduction. . .	28
4	Ex 1: Coefficients réduits sur l'échelle -2, après 4 niveaux de réduction. . .	29
5	Ex 1: Coefficients réduits sur l'échelle -2, après 4 niveaux de réduction. . .	29
6	Ex 2: Projection de $a(x)$ sur l'échelle -6. . . . .	30
7	Ex 2: Coefficients réduits de $a(x)$ aux échelles -4 et -2. . . . .	30
8	Ex 3: Comparaison du coefficient homogénéisé exact avec la valeur expérimentale obtenue à différentes échelles de projection. . . . .	31
9	Ex 3: Zoom de la figure 8. . . . .	32
10	Ex 4: Projection de $a(x)$ sur l'échelle $V_{-4}$ . . . . .	33
11	Ex 4: Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projections. . .	33
12	Ex 5: Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projections. . .	34
13	Ex 6: Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projections, et différentes méthodes. . . . .	35
14	Ex 6: Temps de calcul de la deuxième méthode, en seconde, selon différentes échelles de projections. . . . .	36
15	Ex 7: Représentation à l'échelle -5. . . . .	37
16	Ex 7: Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projection. . .	37
17	Ex 8: Représentation à l'échelle $V_{-5}$ . . . . .	38
18	Ex 8: Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projection. . .	38

## Liste des tableaux

1	Décomposition LU simplifiée. . . . .	47
2	Projection de l'opérateur $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$ sur $V_j$ . . . . .	48
3	Calcul de la récurrence sur $H_k^{(j)}$ . . . . .	49

*“Si les fleuves et les mers peuvent être les rois des vallées,  
c’est qu’ils savent si bien se placer plus bas qu’elles.”*

Lao Tseu.





# 1 Introduction

La présente étude est liée à des problèmes posés par l'ingénierie des réservoirs pétroliers. La complexité du milieu, le sous-sol, qui est très hétérogène et irrégulier, rend très complexe sa modélisation, en vue de simulations numériques. De plus nous ne pouvons mesurer les propriétés du sous-sol que sur de petits échantillons, ce qui nous donne une connaissance très partielle du milieu. Des méthodes géostatistiques nous permettent d'établir un modèle aléatoire pour les caractéristiques du milieu. Nous regarderons plus particulièrement le comportement de la perméabilité. Ce modèle se construit notamment à partir de la loi de la perméabilité locale et des corrélations, estimées d'après les données empiriques.

Si les variations locales ne sont pas complètement erratiques, la théorie de l'homogénéisation établit pour de larges classes de systèmes, que le comportement des coefficients hétérogènes à grande échelle est asymptotiquement celui d'un système du même type, à coefficients constants, appelés coefficients homogénéisés. C'est un problème typique de changement d'échelle (upscaling). L'analyse multirésolution permet d'approcher par des méthodes numériques les coefficients homogénéisés. C'est à cette approche de l'homogénéisation que nous nous intéressons dans cette étude.

Nous chercherons à établir plus particulièrement le coefficient homogénéisé de la perméabilité de l'équation dérivant de la loi de Darcy [1] :

$$-\operatorname{div} k(x) \nabla p(x) = f(x),$$

dans un domaine  $Q$ , où  $k(x)$  représente la perméabilité du milieu au point  $x \in Q$  et  $f$  est le terme source. Cette équation est très utilisée dans l'ingénierie pétrolière. En effet, en régime permanent, l'écoulement d'un fluide monophasique incompressible dans un milieu poreux hétérogène saturé, est régi par le système d'équations suivant :

- La loi de Darcy :

$$u(x) = -k(x) \nabla p(x),$$

où  $u(x)$  est le flux du fluide,  $k(x)$  est la conductivité hydraulique et  $\nabla p(x)$  est le gradient de pression local. De plus nous avons  $k(x) = a(x)/\mu$ ,  $a(x)$  désignant la perméabilité du milieu et  $\mu$  la viscosité du fluide.

- L'incompressibilité se traduit par :

$$\operatorname{div} u(x) = 0.$$

En combinant ces deux équations, nous obtenons l'équation à résoudre :

$$-\operatorname{div} k(x) \nabla p(x) = 0.$$

Dans un premier temps, nous définirons une analyse multirésolution et nous présenterons une procédure de réduction d'une classe d'équations par une analyse multirésolution. Cette procédure sera étudiée plus particulièrement dans la base de Haar. Nous présenterons ensuite des approches classiques de l'homogénéisation, puis une approche par une

analyse multirésolution, qui fait appel à la procédure de réduction d'équations. Nous étudierons alors l'opérateur  $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$ , qui permet d'approcher le coefficient homogénéisé de la perméabilité de l'équation de Darcy pour des dimensions supérieures à l'unité. Cette approche restreint cependant la classe des fonctions représentant la perméabilité. Nous présenterons enfin quelques applications numériques du calcul de coefficient homogénéisé par une analyse multirésolution. Ces applications se feront, dans un premier temps par la méthode de réduction d'équations dans la base de Haar, puis par celle qui permet la réduction de l'opérateur  $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$ .

## 2 Analyse multirésolution

### 2.1 Cas général

**Définition 2.1** Une analyse multirésolution de  $L^2(\Omega)$ , où  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , consiste en une suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\Omega)$  tels que :

a)  $\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots$

b)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\Omega)$ .

c)  $V_j$  est engendré par la base orthonormée :

$$\left\{ \phi_k^j(x) = 2^{-\frac{dj}{2}} \phi(2^{-j}x - k), k \in \mathbb{Z}^d \right\},$$

pour une certaine fonction  $\phi$  appelée la fonction d'échelle.

d)  $\phi$  satisfait :

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h_k \phi(x - k),$$

où  $\{h_k, k \in \mathbb{Z}^d\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ .

Cette dernière propriété est équivalente à :

d') Si  $f(x) \in V_0$  alors  $f(x - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}^d$ .  
 $f(x) \in V_j$  si et seulement si  $f(2x) \in V_{j-1}$ .

Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$ , il faut modifier les fonctions près du bord de  $\Omega$ . Sauf pour le cas de la base de Haar, où cette définition reste correcte.

Si  $\Omega$  est borné, il existe une échelle plus grossière  $V_0$  alors a) s'écrit  $V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots$ , et b) s'écrit:  $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} V_j = V_0$ .

Soit  $W_j$  le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$ , nous avons donc

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

$W_j$  est engendré par  $2^d - 1$  fonctions vérifiant :

$$\left\{ \psi_k^j(x) = 2^{-\frac{dj}{2}} \psi(2^{-j}x - k), k \in \mathbb{Z}^d \right\},$$

où  $\psi$  appelée ondelette, satisfait

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g_k \phi(x - k),$$

avec  $\{g_k, k \in \mathbb{Z}^d\} \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ .

L'ondelette  $\psi$  est caractérisée par  $\{g_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$ , qui n'est pas unique.

Nous noterons  $P_j$  et  $Q_j$  les opérateurs de projection orthogonale de  $L^2(\Omega)$  sur  $V_j$  et  $W_j$ , respectivement (nous avons  $Q_{j+1} = P_j - P_{j+1}$ ).

Soit  $\mathbf{S}$  un opérateur linéaire sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , et  $\mathbf{S}_j$  sa restriction sur  $V_j$  ( $\mathbf{S}_j = P_j \mathbf{S} P_j$ ). Comme  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$  et  $\mathbf{S}_j : V_j \rightarrow V_j$  nous avons

$$\mathbf{S}_j = \begin{pmatrix} A_{\mathbf{S}_j} & B_{\mathbf{S}_j} \\ C_{\mathbf{S}_j} & T_{\mathbf{S}_j} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_j : V_{j+1} \oplus W_{j+1} \rightarrow V_{j+1} \oplus W_{j+1},$$

$$\begin{aligned} \text{où } A_{\mathbf{S}_j} &\triangleq Q_{j+1} \mathbf{S}_j Q_{j+1} : W_{j+1} \rightarrow W_{j+1}, \\ B_{\mathbf{S}_j} &\triangleq Q_{j+1} \mathbf{S}_j P_{j+1} : W_{j+1} \rightarrow V_{j+1}, \\ C_{\mathbf{S}_j} &\triangleq P_{j+1} \mathbf{S}_j Q_{j+1} : V_{j+1} \rightarrow W_{j+1}, \\ T_{\mathbf{S}_j} &\triangleq P_{j+1} \mathbf{S}_j P_{j+1} : V_{j+1} \rightarrow V_{j+1}, \\ (T_{\mathbf{S}_j} &= \mathbf{S}_{j+1}). \end{aligned}$$

Notons encore  $s_x = P_{j+1}x$  et  $d_x = Q_{j+1}x$ , les projections de  $x \in L^2(\Omega)$  sur  $V_{j+1}$  et  $W_{j+1}$  respectivement.

Considérons :

$$\mathbf{S}_j x = f, \tag{1}$$

où  $x \in V_j$  et  $f \in V_j$ .

L'équation (1) équivaut à :

$$\begin{pmatrix} A_{\mathbf{S}_j} & B_{\mathbf{S}_j} \\ C_{\mathbf{S}_j} & T_{\mathbf{S}_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ s_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix}, \tag{2}$$

où  $d_x, d_f \in W_{j+1}$  et  $s_x, s_f \in V_{j+1}$ .

En supposant  $A_{\mathbf{S}_j}$  inversible, et remarquant que  $d_x = A_{\mathbf{S}_j}^{-1}(d_f - B_{\mathbf{S}_j} s_x)$  nous avons

$$\left(T_{\mathbf{S}_j} - C_{\mathbf{S}_j} A_{\mathbf{S}_j}^{-1} B_{\mathbf{S}_j}\right) s_x = s_f - C_{\mathbf{S}_j} A_{\mathbf{S}_j}^{-1} d_f,$$

qui est l'équation réduite, et l'opérateur

$$R_{\mathbf{S}_j} \triangleq T_{\mathbf{S}_j} - C_{\mathbf{S}_j} A_{\mathbf{S}_j}^{-1} B_{\mathbf{S}_j},$$

est la réduction d'un pas de l'opérateur  $\mathbf{S}_j$ , aussi appelé le complément de Schur.

## 2.2 Exemples

### 2.2.1 Exemple 1

Dans la base de Haar, les fonctions d'échelle et les ondelettes sont définies simplement. En effet, si nous prenons  $d = 1$  et  $\Omega = [0,1]$ , et  $\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ ,  $V_j$  est engendré par la base orthonormée :

$$\left\{ \phi_k^j(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \chi_{[k2^j, (k+1)2^j]}(x), k = 0, \dots, 2^j - 1 \right\}.$$

et  $W_j$  est engendré par la base orthonormée :

$$\left\{ \psi_k^j(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \left( \chi_{[k2^j, (k+\frac{1}{2})2^j]}(x) - \chi_{[(k+\frac{1}{2})2^j, (k+1)2^j]}(x) \right), k = 0, \dots, 2^j - 1 \right\},$$

et  $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$ .

Il est possible de vérifier que  $\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x-1) \right)$  et ainsi la suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution.

### 2.2.2 Exemple 2

Toujours avec  $d = 1$ , et en prenant  $\Omega = \mathbb{R}$ , nous pouvons considérer l'exemple, où  $V_0$  désigne le sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$  composé des fonctions  $f$  dont la transformée de Fourier  $\hat{f}$  est portée par  $[-\pi, \pi]$ .  $V_0$  est engendré par la base orthonormée  $\left\{ \phi_k^0(x) = \frac{\sin(\pi(x-k))}{\pi(x-k)}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . En utilisant que

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j-1}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z},$$

nous construisons la suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , à partir de  $V_0$ . Il est possible de vérifier que cet exemple conduit à une analyse multirésolution. Pour d'autres exemples nous nous référons à Meyer [2].

## 2.3 Procédure de réduction d'équations par une analyse multirésolution

Considérons le système de  $n$  équations différentielles ordinaires sur  $L^2([0,1])$  de la forme :

$$\mathbf{B}x + q + \lambda = \mathbf{K}(\mathbf{A}x + p), \quad (3)$$

où  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  sont des opérateurs sur  $L^2([0,1])$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\lambda$  est un paramètre dans  $\mathcal{H}$ , et  $p$ ,  $q$  et  $x$  sont des fonctions de carré intégrable définies sur

$[0,1]$  à valeurs dans  $\mathcal{H}$ .

Un exemple représentatif de (3) est l'équation intégrale :

pour tout  $t \in [0,1]$

$$(I + B(t))x(t) + q(t) + \lambda = \int_0^t (A(s)x(s) + p(s))ds, \quad (4)$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices  $n \times n$ ,  $p$  et  $q$  des vecteurs de taille  $n$  et  $x$  le vecteur solution de taille  $n$ .

Ainsi  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont les opérateurs dont l'action sur  $x$  est point par point la multiplication par  $A$  et  $B$ , et  $\mathbf{K}$  est l'opérateur intégral de noyau :

$$K(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < s < t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous considérons la décomposition de  $L^2([0,1])$  par  $V_0 \subset V_{-1} \cdots \subset V_j \subset \cdots$ , puis nous projetons (3) sur  $V_j$ , avec  $j < 0$ :

$$\mathbf{B}_j x_j + q_j + \lambda = \mathbf{K}_j (\mathbf{A}_j x_j + p_j), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathbf{K}_j &\triangleq P_j \mathbf{K} P_j, & p_j &\triangleq P_j p, \\ \mathbf{A}_j &\triangleq P_j \mathbf{A} P_j, & q_j &\triangleq P_j q, \\ \mathbf{B}_j &\triangleq P_j \mathbf{B} P_j, \end{aligned}$$

et  $x_j$  est la solution de cette équation (5). Nous cherchons une relation de récurrence sur  $\mathbf{A}_k^{(j)}$ ,  $\mathbf{B}_k^{(j)}$ ,  $p_k^{(j)}$ ,  $q_k^{(j)}$  pour  $k = j, \dots, 0$ , tel que  $x_k^{(j)}$ , la projection de  $x_j$  sur  $V_k$  satisfasse :

$$\mathbf{B}_k^{(j)} x_k^{(j)} + q_k^{(j)} + \lambda = \mathbf{K}_k (\mathbf{A}_k^{(j)} x_k^{(j)} + p_k^{(j)}).$$

Notons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbf{G},k}^{(j)} &\triangleq Q_k \mathbf{G}_{k-1}^{(j)} Q_k, \\ \mathcal{B}_{\mathbf{G},k}^{(j)} &\triangleq \frac{1}{\epsilon_k} Q_k \mathbf{G}_{k-1}^{(j)} P_k, \\ \mathcal{C}_{\mathbf{G},k}^{(j)} &\triangleq \frac{1}{\epsilon_k} P_k \mathbf{G}_{k-1}^{(j)} Q_k, \\ \mathcal{T}_{\mathbf{G},k}^{(j)} &\triangleq P_k \mathbf{G}_{k-1}^{(j)} P_k, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{G} = \mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$ , et  $\epsilon_k$  est un facteur d'échelle, il est généralement de l'ordre de grandeur

de  $Q_k x_j$ , et :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathbf{K},k} &\triangleq \frac{1}{\epsilon_k^2} Q_k \mathbf{K} Q_k, \\ \mathbf{B}_{\mathbf{K},k} &\triangleq \frac{1}{\epsilon_k} Q_k \mathbf{K} P_k, \\ \mathbf{C}_{\mathbf{K},k} &\triangleq \frac{1}{\epsilon_k} P_k \mathbf{K} Q_k, \\ \mathcal{T}_{\mathbf{K},k} &\triangleq P_k \mathbf{K} P_k.\end{aligned}$$

D'après Brewster *et al.* [3] nous avons :

**Proposition 2.2** *Pour tout  $k = j, \dots, 0$ , nous avons les relations de récurrence suivantes :*

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_k^{(j)} &= \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} F_k^{(j)-1} \left( \mathbf{B}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathbf{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K},k} \mathbf{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right), \\ \mathbf{B}_k^{(j)} &= \mathcal{T}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{C}_{\mathbf{K},k} \mathbf{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \\ &\quad - \epsilon_k^2 \left( \mathbf{C}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathbf{C}_{\mathbf{K},k} \mathbf{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) F_k^{(j)-1} \left( \mathbf{B}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathbf{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K},k} \mathbf{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}p_k^{(j)} &= S_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} F_k^{(j)-1} \left( D_{q,k}^{(j)} - \mathbf{B}_{\mathbf{K},k} S_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)} \right), \\ q_k^{(j)} &= S_{q,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{C}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \left( \mathbf{C}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathbf{C}_{\mathbf{K},k} \mathbf{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) F_k^{(j)-1} \left( D_{q,k}^{(j)} - \mathbf{B}_{\mathbf{K},k} S_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)} \right),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}S_{q,k}^{(j)} &\triangleq P_k q_{k-1}^{(j)}, & S_{p,k}^{(j)} &\triangleq P_k p_{k-1}^{(j)}, \\ D_{q,k}^{(j)} &\triangleq \frac{1}{\epsilon_k} Q_k q_{k-1}^{(j)}, & D_{p,k}^{(j)} &\triangleq \frac{1}{\epsilon_k} Q_k p_{k-1}^{(j)},\end{aligned}$$

et

$$F_k^{(j)} \triangleq \mathcal{A}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{B}_{\mathbf{K},k} \mathbf{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)},$$

est supposé inversible.

Le facteur d'échelle  $\epsilon_k$  met en évidence le fait que  $\mathbf{A}_k^{(j)}$ ,  $\mathbf{B}_k^{(j)}$ ,  $p_k^{(j)}$ ,  $q_k^{(j)}$  sont égaux aux projections sur  $V_k$  de  $\mathbf{A}_{k-1}^{(j)}$ ,  $\mathbf{B}_{k-1}^{(j)}$ ,  $p_{k-1}^{(j)}$ ,  $q_{k-1}^{(j)}$  respectivement, réduites d'un terme dépendant de ce facteur d'échelle.

**Preuve** En suivant la preuve de Brewster *et al.* [3] supposons connu  $\mathbf{A}_{k-1}^{(j)}$ ,  $\mathbf{B}_{k-1}^{(j)}$ ,  $\mathbf{K}_{k-1}$ ,  $p_{k-1}^{(j)}$  et  $q_{k-1}^{(j)}$  de l'équation :

$$\mathbf{B}_{k-1}^{(j)} x_{k-1}^{(j)} + q_{k-1}^{(j)} + \lambda = \mathbf{K}_{k-1} \left( \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} x_{k-1}^{(j)} + p_{k-1}^{(j)} \right).$$

Comme  $V_{k-1} = V_k \oplus W_k$ , nous avons

$$x_{k-1}^{(j)} = P_k x_{k-1}^{(j)} + Q_k x_{k-1}^{(j)}.$$

Notons :

$$u \stackrel{\Delta}{=} P_k x_{k-1}^{(j)} = x_k^{(j)},$$

$$\text{et } \frac{1}{\epsilon_k} v \stackrel{\Delta}{=} Q_k x_{k-1}^{(j)},$$

Donc  $x_{k-1}^{(j)} = u + \epsilon_k v$ . Nous avons ainsi

$$\mathbf{B}_{k-1}^{(j)} (u + \epsilon_k v) + q_{k-1}^{(j)} + \lambda = \mathbf{K}_{k-1} \left( \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} (u + \epsilon_k v) + p_{k-1}^{(j)} \right).$$

En projetant cette équation sur  $V_k$  et sur  $W_k$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} P_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} (u + \epsilon_k v) + P_k q_{k-1}^{(j)} + \lambda = P_k \mathbf{K}_{k-1} \left( \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} (u + \epsilon_k v) + p_{k-1}^{(j)} \right) \\ Q_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} (u + \epsilon_k v) + Q_k q_{k-1}^{(j)} = Q_k \mathbf{K}_{k-1} \left( \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} (u + \epsilon_k v) + p_{k-1}^{(j)} \right). \end{cases} \quad (6)$$

Or  $u \in V_k$  et  $v \in W_k$ , ainsi  $u = P_k u$  et  $v = Q_k v$ , nous avons donc :

$$P_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} u = P_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} P_k u = \mathcal{T}_{\mathbf{B},k}^{(j)} u,$$

$$P_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} v = P_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} Q_k v = \epsilon_k \mathcal{C}_{\mathbf{B},k}^{(j)} v,$$

$$Q_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} u = Q_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} P_k u = \epsilon_k \mathcal{B}_{\mathbf{B},k}^{(j)} u,$$

$$Q_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} v = Q_k \mathbf{B}_{k-1}^{(j)} Q_k v = \mathcal{A}_{\mathbf{B},k}^{(j)} v.$$

De même :

$$P_k \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} u = P_k \mathbf{K}_{k-1} P_k P_k \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} P_k u + P_k \mathbf{K}_{k-1} Q_k Q_k \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} P_k u$$

$$= \mathcal{T}_{\mathbf{K},k} \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} u + \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} \mathcal{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} u,$$

$$P_k \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} v = P_k \mathbf{K}_{k-1} P_k P_k \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} Q_k v + P_k \mathbf{K}_{k-1} Q_k Q_k \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} Q_k v$$

$$= \epsilon_k \mathcal{T}_{\mathbf{K},k} \mathcal{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} v + \epsilon_k \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} \mathcal{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)} v,$$

$$Q_k \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} u = Q_k \mathbf{K}_{k-1} P_k P_k \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} P_k u + Q_k \mathbf{K}_{k-1} Q_k Q_k \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} P_k u$$

$$= \epsilon_k \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} u + \epsilon_k^3 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} u,$$

$$Q_k \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} v = Q_k \mathbf{K}_{k-1} P_k P_k \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} Q_k v + Q_k \mathbf{K}_{k-1} Q_k Q_k \mathbf{A}_{k-1}^{(j)} Q_k v$$

$$= \epsilon_k^2 \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} v + \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)} v.$$

Soit

$$S_{q,k}^{(j)} \stackrel{\Delta}{=} P_k q_{k-1}^{(j)}, \quad S_{p,k}^{(j)} \stackrel{\Delta}{=} P_k p_{k-1}^{(j)},$$

$$D_{q,k}^{(j)} \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\epsilon_k} Q_k q_{k-1}^{(j)}, \quad D_{p,k}^{(j)} \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\epsilon_k} Q_k p_{k-1}^{(j)}.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
P_k \mathbf{K}_{k-1} p_{k-1} &= P_k \mathbf{K}_{k-1} \left( S_{p,k}^{(j)} + \epsilon_k D_{p,k}^{(j)} \right) \\
&= P_k \mathbf{K}_{k-1} P_k S_{p,k}^{(j)} + \epsilon_k P_k \mathbf{K}_{k-1} Q_k D_{p,k}^{(j)} \\
&= \mathcal{T}_{\mathbf{K},k} S_{p,k}^{(j)} + \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)},
\end{aligned}$$

car  $S_{p,k}^{(j)} \in V_k$  et  $D_{p,k}^{(j)} \in W_k$ .

De même :

$$\begin{aligned}
Q_k \mathbf{K}_{k-1} p_{k-1} &= Q_k \mathbf{K}_{k-1} \left( S_{p,k}^{(j)} + \epsilon_k D_{p,k}^{(j)} \right) \\
&= Q_k \mathbf{K}_{k-1} P_k S_{p,k}^{(j)} + \epsilon_k Q_k \mathbf{K}_{k-1} Q_k D_{p,k}^{(j)} \\
&= \epsilon_k \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} S_{p,k}^{(j)} + \epsilon_k^3 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)}.
\end{aligned}$$

En substituant toutes ces égalités dans (6) nous avons :

$$\begin{aligned}
\left( \mathcal{T}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} \mathcal{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) u + \epsilon_k^2 \left( \mathcal{C}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} \mathcal{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) v + S_{q,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)} + \lambda \\
= \mathcal{T}_{\mathbf{K},k} \left( \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} u + \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} v + S_{p,k}^{(j)} \right),
\end{aligned} \tag{7}$$

et

$$\begin{aligned}
\left( \mathcal{A}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) v \\
= -D_{q,k}^{(j)} + \left( \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} + \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \mathcal{B}_{\mathbf{B},k}^{(j)} \right) u + \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} S_{p,k}^{(j)} + \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Soit

$$F_k^{(j)} \triangleq \mathcal{A}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)},$$

que nous supposons inversible. De (8), nous obtenons :

$$v = -C_k^{(j)} u - r_k^{(j)},$$

où

$$C_k^{(j)} \triangleq F_k^{(j)-1} \left( \mathcal{B}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right),$$

et

$$r_k^{(j)} \triangleq F_k^{(j)-1} \left( D_{q,k}^{(j)} - \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} S_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)} \right).$$

En substituant  $v$  dans (7), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\left[ \mathcal{T}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} \mathcal{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \left( \mathcal{C}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} \mathcal{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) F_k^{(j)-1} \left( \mathcal{B}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) \right] u \\
+ S_{q,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \left( \mathcal{C}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} \mathcal{A}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) F_k^{(j)-1} \left( D_{q,k}^{(j)} - \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} S_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)} \right) + \lambda \\
= \mathcal{T}_{\mathbf{K},k} \left[ \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} F_k^{(j)-1} \left( \mathcal{B}_{\mathbf{B},k}^{(j)} - \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} \mathcal{T}_{\mathbf{A},k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} \mathcal{B}_{\mathbf{A},k}^{(j)} \right) u \right. \\
\left. + S_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{C}_{\mathbf{A},k}^{(j)} F_k^{(j)-1} \left( D_{q,k}^{(j)} - \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} S_{p,k}^{(j)} - \epsilon_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} D_{p,k}^{(j)} \right) \right].
\end{aligned}$$



Comme  $u = x_k^{(j)}$  et  $\mathcal{T}_{\mathbf{K},k} = \mathbf{K}_k$ , nous obtenons la Proposition 2.2.  $\square$

Nous pouvons ainsi calculer les suites d'opérateurs  $\{\mathbf{A}_k^{(j)}\}$ ,  $\{\mathbf{B}_k^{(j)}\}$  et de fonctions  $\{p_k^{(j)}\}$ ,  $\{q_k^{(j)}\}$ , pour tout  $k = j, \dots, 0$ .

Il est possible ensuite de résoudre l'équation sur chaque  $V_k$ , pour tout  $k = j, \dots, 0$ , par une méthode de reconstruction. Nous résolvons l'équation en  $x_0^{(j)}$  :

$$\mathbf{B}_0^{(j)} x_0^{(j)} + q_0^{(j)} + \lambda = \mathbf{K}_0 \left( \mathbf{A}_0^{(j)} x_0^{(j)} + p_0^{(j)} \right).$$

Nous obtenons enfin la suite des solutions  $\{x_k^{(j)}\}$ , pour tout  $k = j, \dots, 0$ , par l'algorithme de reconstruction :

$$\begin{cases} Q_k x_j^{(j)} = -\epsilon_k C_k^{(j)} x_k^{(j)} - \epsilon_k r_k^{(j)} \\ x_{k-1}^{(j)} = x_k^{(j)} + Q_k x_j^{(j)}. \end{cases}$$

C'est-à-dire que nous avons obtenu à  $j$  fixé les coefficients, et la solution de l'équation à toutes les échelles  $k = j, \dots, 0$ . Dans cette étude nous nous intéressons plus particulièrement à la procédure de réduction. Pour plus de détails sur l'algorithme de reconstruction nous nous référons à *Brewster et al.* [3].

## 2.4 Résultat d'existence et d'unicité

Supposons que pour  $k$  fixé, il existe une sous-suite  $\{n_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$  telle que les limites suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{A}_k^{(-\infty)} \triangleq \lim_{l \rightarrow -\infty} \mathbf{A}_k^{(n_l)}, & p_k^{(-\infty)} \triangleq \lim_{l \rightarrow -\infty} p_k^{(n_l)}, \\ \mathbf{B}_k^{(-\infty)} \triangleq \lim_{l \rightarrow -\infty} \mathbf{B}_k^{(n_l)}, & q_k^{(-\infty)} \triangleq \lim_{l \rightarrow -\infty} q_k^{(n_l)}, \end{cases} \quad (9)$$

existent.

D'après *Brewster et al.* [3], nous avons les résultats suivants :

**Proposition 2.3** *Soit  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{K}$  des opérateurs bornés de fonctions sur  $L^2(\Omega)$  à valeurs dans un Hilbert  $\mathcal{H}$ , et  $\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{A}$  a un inverse borné. Alors l'équation :*

$$\mathbf{B}x + q + \lambda = \mathbf{K}(\mathbf{A}x + p),$$

*a une unique solution  $x \in L^2(\Omega)$  à valeur dans  $\mathcal{H}$  pour tout  $p, q \in L^2(\Omega)$  à valeur dans  $\mathcal{H}$ .*

*De plus il existe  $j_0 \leq 0$  tel que pour tout  $j \leq j_0$ ,  $\mathbf{B}_j - \mathbf{K}_j \mathbf{A}_j$  a un inverse borné et*

$$\mathbf{B}_j x_j + q_j + \lambda = \mathbf{K}_j (\mathbf{A}_j x_j + p_j),$$

*a une unique solution  $x_j \in V_j$  et  $x_j$  converge vers  $x$  lorsque  $j$  tend vers  $-\infty$ .*

**Proposition 2.4** *Supposons en plus des conditions de la Proposition 2.3, que les suites  $\{\mathbf{A}_k^{(j)}\}$ ,  $\{\mathbf{B}_k^{(j)}\}$ ,  $\{p_k^{(j)}\}$ ,  $\{q_k^{(j)}\}$ , pour  $j \leq j_0 \leq 0$  et  $j \leq k \leq 0$ , vérifient les relations de récurrence de la Proposition 2.2 et que l'hypothèse (9) est satisfaite, alors chaque  $x_k^{(-\infty)}$  satisfait :*

$$\mathbf{B}_k^{(-\infty)} x_k^{(-\infty)} + q_k^{(-\infty)} = \mathbf{K}_k \left( \mathbf{A}_k^{(-\infty)} x_k^{(-\infty)} + p_k^{(-\infty)} \right),$$

$x_k^{(-\infty)}$  est la projection de  $x$  sur  $V_k$  et  $\mathbf{B}_k^{(-\infty)} - \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k^{(-\infty)}$  a un inverse borné,

$$\|(\mathbf{B}_k^{(-\infty)} - \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k^{(-\infty)})^{-1}\| \leq \|(\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{A})^{-1}\|.$$

## 2.5 La procédure de réduction dans la base de Haar

Dans la base de Haar, il est possible d'expliciter les projections et les relations de récurrence de la Proposition 2.2 pour l'équation :

$$\mathbf{B}x + q + \lambda = \mathbf{K}(\mathbf{A}x + p).$$

Avec  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  définis précédemment l'équation s'écrit sous forme intégrale :

$$(I + B(t))x(t) + q(t) + \lambda = \int_0^t (A(s)x(s) + p(s))ds, \quad (10)$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices  $n \times n$ ,  $p$  et  $q$  sont des vecteurs et  $x$  est la solution vecteur de taille  $n$ . Ainsi dans la base de Haar  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_j$  et  $\mathbf{K}_j$ , les projetés de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  sur l'échelle  $V_j$  sont de taille  $(2^{-j}n) \times (2^{-j}n)$ .

Dans la base de Haar, les représentations matricielles de  $\mathbf{A}_j$  et  $\mathbf{B}_j$  sont respectivement (cf Annexe A) :

$$\begin{aligned} & \text{diag} \{ (A_j)_i \}_{i=0}^{i=2^{-j}-1}, \\ \text{et} \quad & \text{diag} \{ I + (B_j)_i \}_{i=0}^{i=2^{-j}-1}, \end{aligned}$$

où  $j$  correspond à l'échelle  $V_j$  de projection,  $i$  est l'indice d'entrée de la matrice, et  $I$  est la matrice identité  $n \times n$ . Nous avons noté  $(A_j)_i = 2^{-j} \int_{i2^j}^{(i+1)2^j} A(s)ds$  et de même  $(B_j)_i = 2^{-j} \int_{i2^j}^{(i+1)2^j} B(s)ds$ .

De plus la représentation matricielle de  $\mathbf{K}_j$  est (cf Annexe A) :

$$\delta_j \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I & 0 & \dots & 0 \\ I & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ I & \dots & I & \frac{1}{2}I \end{pmatrix},$$

où  $\delta_j = 2^j$  (avec  $j \leq 0$ ).

Nous avons donc pour tout  $i = 0, \dots, 2^{-j} - 1$  :

$$(I + (B_j)_i) x_{j,i} + (q_j)_i + \lambda = \frac{1}{2} \delta_j ((A_j)_i x_{j,i} + (p_j)_i) + \delta_j \sum_{i'=0}^{i-1} ((A_j)_{i'} x_{j,i'} + (p_j)_{i'}) , \quad (11)$$

où  $x_{j,i}$  est la solution de :

$$(I + (B_j(t))_i) x_{j,i}(t) + (q_j(t))_i + \lambda = \int_0^t ((A_j(s))_i x_{j,i}(s) + (p_j(s))_i) .$$

Notons

$$\begin{aligned} (S_{\mathbf{A}})_i &\triangleq \frac{1}{2} \left( (A_{k-1}^{(j)})_{2i} + (A_{k-1}^{(j)})_{2i+1} \right) , \\ (D_{\mathbf{A}})_i &\triangleq \frac{2}{\delta_k} \left( (A_{k-1}^{(j)})_{2i} - (A_{k-1}^{(j)})_{2i+1} \right) , \\ (S_{\mathbf{B}})_i &\triangleq \frac{1}{2} \left( (B_{k-1}^{(j)})_{2i} + (B_{k-1}^{(j)})_{2i+1} \right) , \\ (D_{\mathbf{B}})_i &\triangleq \frac{2}{\delta_k} \left( (B_{k-1}^{(j)})_{2i} - (B_{k-1}^{(j)})_{2i+1} \right) , \\ (S_p)_i &\triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (p_{k-1}^{(j)})_{2i} + (p_{k-1}^{(j)})_{2i+1} \right) , \\ (D_p)_i &\triangleq \frac{2\sqrt{2}}{\delta_k} \left( (p_{k-1}^{(j)})_{2i} - (p_{k-1}^{(j)})_{2i+1} \right) , \\ (S_q)_i &\triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (q_{k-1}^{(j)})_{2i} + (q_{k-1}^{(j)})_{2i+1} \right) , \\ (D_q)_i &\triangleq \frac{2\sqrt{2}}{\delta_k} \left( (q_{k-1}^{(j)})_{2i} - (q_{k-1}^{(j)})_{2i+1} \right) . \end{aligned}$$

Nous obtenons dans la base de Haar (en prenant  $\epsilon_k = \frac{\delta_k}{4}$ ) (cf Annexe A) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbf{K},k} &= 0, & \mathcal{A}_{\mathbf{G},k}^{(j)} &= \text{diag} \{ (S_{\mathbf{G}})_i \}_{i=0}^{i=2^{-k}-1} , \\ \mathcal{B}_{\mathbf{K},k} &= -\mathbf{I}, & \mathcal{B}_{\mathbf{G},k}^{(j)} &= \text{diag} \{ (D_{\mathbf{G}})_i \}_{i=0}^{i=2^{-k}-1} , \\ \mathcal{C}_{\mathbf{K},k} &= \mathbf{I}, & \mathcal{C}_{\mathbf{G},k}^{(j)} &= \text{diag} \{ (D_{\mathbf{G}})_i \}_{i=0}^{i=2^{-k}-1} , \\ \mathcal{T}_{\mathbf{K},k} &= \mathbf{K}_k, & \mathcal{T}_{\mathbf{G},k}^{(j)} &= \text{diag} \{ (S_{\mathbf{G}})_i \}_{i=0}^{i=2^{-k}-1} , \end{aligned}$$

où  $\mathbf{G} = \mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$ .

En substituant ces inégalités dans les relations de récurrence de la Proposition 2.2, nous obtenons :

$$(A_k^{(j)})_i = (S_{\mathbf{A}})_i - \frac{\delta_k^2}{16} (D_{\mathbf{A}})_i F^{-1} ((D_{\mathbf{B}})_i + (S_{\mathbf{A}})_i) , \quad (12)$$

$$(B_k^{(j)})_i = (S_{\mathbf{B}})_i - \frac{\delta_k^2}{16} (D_{\mathbf{A}})_i - \frac{\delta_k^2}{16} ((D_{\mathbf{B}})_i - (S_{\mathbf{A}})_i) F^{-1} ((D_{\mathbf{B}})_i + (S_{\mathbf{A}})_i) , \quad (13)$$

$$\text{et } F = I + (S_{\mathbf{B}})_i + \frac{\delta_k^2}{16} (D_{\mathbf{A}})_i . \quad (14)$$

De plus

$$\left( p_k^{(j)} \right)_i = (S_p)_i - \frac{\delta_k^2}{16} (D_{\mathbf{A}})_i F^{-1} \left( (D_q)_i + (S_p)_i \right) , \quad (15)$$

$$\left( q_k^{(j)} \right)_i = (S_q)_i - \frac{\delta_k^2}{16} (D_p)_i - \frac{\delta_k^2}{16} \left( (D_{\mathbf{B}})_i - (S_{\mathbf{A}})_i \right) F^{-1} \left( (D_q)_i + (S_p)_i \right) . \quad (16)$$

Nous pouvons alors calculer les suites d'opérateurs  $\{ \mathbf{A}_k^{(j)} \}$ ,  $\{ \mathbf{B}_k^{(j)} \}$  et de fonctions  $\{ p_k^{(j)} \}$ ,  $\{ q_k^{(j)} \}$ , puis obtenir la suite des solutions  $\{ x_k^{(j)} \}$ , par l'algorithme de reconstruction, comme dans la section 2.3.

Notons que nous avons une équation de la même forme que (11) :

$$\begin{aligned} & \left( I + \left( B_k^{(j)} \right)_i \right) x_{k,i}^{(j)} + \left( q_k^{(j)} \right)_i + \lambda \\ &= \frac{1}{2} \delta_k \left( \left( A_k^{(j)} \right)_i x_{k,i}^{(j)} + \left( p_k^{(j)} \right)_i \right) + \delta_k \sum_{i'=0}^{i-1} \left( \left( A_k^{(j)} \right)_{i'} x_{k,i'}^{(j)} + \left( p_k^{(j)} \right)_{i'} \right) . \end{aligned}$$

Et sur  $V_0$ , nous avons :

$$\left( I + B_0^{(j)} \right) x_0^{(j)} + q_0^{(j)} + \lambda = \frac{1}{2} \left( A_0^{(j)} x_0^{(j)} + p_0^{(j)} \right) .$$

Nous pouvons remarquer que :

$$\begin{aligned} & \left( I + \left( B_k^{(j)} \right)_{i+1} - \frac{1}{2} \delta_k \left( A_k^{(j)} \right)_{i+1} \right) x_{k,i+1}^{(j)} \\ &= \left( I + \left( B_k^{(j)} \right)_i + \frac{1}{2} \delta_k \left( A_k^{(j)} \right)_i \right) x_{k,i}^{(j)} + \left( q_k^{(j)} \right)_i - \left( q_k^{(j)} \right)_{i+1} \\ & \quad + \frac{1}{2} \delta_k \left( \left( p_k^{(j)} \right)_i + \left( p_k^{(j)} \right)_{i+1} \right) . \end{aligned}$$

Ceci a une forme similaire au schéma de différences finies. Or la méthode de différences finies (voir Campillo *et al.* [4]) est une des méthodes de calcul des coefficients homogénéisés. Nous présentons ci-dessous d'autres approches de l'homogénéisation.

## 3 Homogénéisation

### 3.1 Approche classique

Nous nous restreindrons ici au problème du type :

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) = f(x) ,$$

sur  $[0,1]$ , où  $a(x)$  est la perméabilité,  $f(x)$  le terme source et  $u(x)$  la solution de l'équation. Nous supposons de plus que les conditions au bord sont de type Dirichlet (i.e.  $u$  est constante aux bords), et que  $a(x)$  est une fonction périodique, de période  $\epsilon \ll 1$  sur  $[0,1]$ . Pour plus de détails nous nous référons à Jikov *et al.* [5].

Nous noterons  $a^\epsilon(x) \triangleq a\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ ,  $u^\epsilon(x) \triangleq u\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$  et  $f^\epsilon(x) \triangleq f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ . En étudiant :

$$-\frac{d}{dx} \left( a^\epsilon(x) \frac{d}{dx} u^\epsilon(x) \right) = f^\epsilon(x), \quad (17)$$

pour des  $\epsilon$  de plus en plus petits, nous obtenons le comportement des coefficients  $a(x)$  sur une échelle de plus en plus grossière. Nous comparons, en fait les caractéristiques des coefficients sur l'échelle de taille  $\epsilon$  et sur une échelle fixée sur  $[0,1]$ .

Le but est de calculer le coefficient effectif  $a^0$  lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, tel que :

$$-\frac{d}{dx} \left( a^0 \frac{d}{dx} u^0(x) \right) = f(x),$$

où  $u^0(x)$  est une limite de  $u^\epsilon(x)$  lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

**Définition 3.1** *Nous dirons que la constante  $a^0$  est le coefficient homogénéisé de  $a(x)$  sur  $[0,1]$  si pour tout  $f \in H^{-1}([0,1])$  les solutions  $u^\epsilon$  du problème de Dirichlet :*

$$u^\epsilon \in H_0^1([0,1]) \quad \text{et} \quad -\frac{d}{dx} \left( a^\epsilon(x) \frac{d}{dx} u^\epsilon(x) \right) = f(x),$$

*vérifient les propriétés de convergence :*

$$u^\epsilon \xrightarrow{H_0^1([0,1])} u^0 \quad \text{et} \quad a^\epsilon \frac{d}{dx} u^\epsilon \xrightarrow{L^2([0,1])} a^0 \frac{d}{dx} u^0,$$

*où  $u^0$  est la solution du problème de Dirichlet :*

$$u^0 \in H_0^1([0,1]) \quad \text{et} \quad -\frac{d}{dx} \left( a^0 \frac{d}{dx} u^0(x) \right) = f^0(x).$$

Pour calculer le coefficient effectif  $a^0$  lorsque le paramètre  $\epsilon$  tend vers 0, nous présentons ici deux méthodes classiques.

### 3.1.1 Méthode de la limite faible

Soit  $p^\epsilon(x) \triangleq a^\epsilon(x) \frac{d}{dx} u^\epsilon(x)$ . Nous cherchons à caractériser la limite faible de  $p^\epsilon(x)$  dans  $L^2([0,1])$  :  $p^0(x) = a^0 \frac{d}{dx} u^0(x)$ . Or dans le cas unidimensionnel nous avons  $\text{rot}(a(x)) = 0$ , et donc d'après l'inégalité de Voigt-Reiss (cf Annexe B) :

$$a^0 = \langle a^{-1} \rangle^{-1} = \left( \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \right)^{-1},$$

et

$$\begin{cases} p^0(x) = - \langle a^{-1} \rangle^{-1} \frac{d}{dx} u^0(x) \\ \frac{d}{dx} p^0(x) = -f(x). \end{cases}$$

Ainsi  $u^0$  est la solution du problème de Dirichlet :

$$u^0 \in H_0^1([0,1]) \quad \text{et} \quad - \langle a^{-1} \rangle^{-1} \frac{d^2}{dx^2} (u^0(x)) = f(x).$$

### 3.1.2 Méthode asymptotique des échelles multiples

Cette méthode est une autre approche du problème d'homogénéisation, et nous donne le même résultat que la méthode de la limite faible vue précédemment, (cf Jikov *et al.* [5] et Coult [6]).

Nous considérons la variable  $y = \frac{x}{\epsilon}$  comme une variable indépendante de  $x$ , elle représente la variable de fine échelle.

Nous cherchons une approximation de  $u^\epsilon(x)$  la solution de (17) de la forme :

$$u_1^\epsilon(x) = u^0(x) + \epsilon u^1(x, y),$$

où  $u^1$  est une fonction de  $x$  et  $y$ , nous avons  $\frac{d}{dx} = \frac{\delta}{\delta x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\delta}{\delta y}$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( a(y) \frac{d}{dx} u_1^\epsilon(x) \right) &= \epsilon^{-1} \left[ \frac{\delta}{\delta y} \left( a(y) \left( \frac{\delta}{\delta x} u^0(x) \right) \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( a(y) \left( \frac{\delta}{\delta y} u^1(x, y) \right) \right) \right] \\ &+ a(y) \left( \frac{\delta^2}{\delta x^2} u^0(x) \right) + \frac{\delta}{\delta x} \left( a(y) \left( \frac{\delta}{\delta y} u^1(x, y) \right) \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( a(y) \left( \frac{\delta}{\delta x} u^1(x, y) \right) \right) \\ &+ \epsilon \left( a(y) \left( \frac{\delta^2}{\delta x^2} u^1(x, y) \right) \right) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

car  $\frac{\delta}{\delta x} a(y) = \frac{\delta}{\delta y} u^0(x)$ . Nous voulons annuler le terme en  $\epsilon^{-1}$ , ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta y} \left( a(y) \left( \frac{\delta}{\delta y} u^1(x, y) \right) \right) &= -\frac{\delta}{\delta y} \left( a(y) \left( \frac{\delta}{\delta x} u^0(x) \right) \right) \\ &= -\left( \frac{d}{dy} a(y) \right) \left( \frac{d}{dx} u^0(x) \right), \end{aligned}$$

car  $u^0$  ne dépend pas de  $y$  et  $a$  de  $x$ . Nous obtenons donc :

$$u^1(x, y) = N(y) \frac{d}{dx} u^0(x),$$

où  $N \in H^1(\square)$  est la solution du problème auxiliaire :

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{d}{dy} N(y) \right) = -\frac{d}{dy} a(y),$$

ou encore :

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \left( 1 + \frac{d}{dy} N(y) \right) \right) = 0. \quad (18)$$

Nous avons ainsi

$$u_1^\epsilon(x) = u^0(x) + \epsilon N(y) \frac{d}{dx} u^0(x).$$

De plus

$$\begin{aligned} a(y) \left( \frac{\delta^2}{\delta x^2} u^0(x) \right) + \frac{\delta}{\delta x} \left( a(y) \left( \frac{\delta}{\delta y} u^1(x,y) \right) \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( a(y) \left( \frac{\delta}{\delta x} u^1(x,y) \right) \right) \\ = \frac{d^2}{dx^2} u^0(x) \left[ a(y) + a(y) \frac{d}{dy} N(y) + \frac{d}{dy} (a(y) N(y)) \right]. \end{aligned}$$

Or, par définition, le coefficient homogénéisé  $a^0$  (qui est le  $A^0$  de l'annexe B) est :

$$\langle a(y) \left( 1 + \frac{d}{dy} N(y) \right) \rangle.$$

De plus  $a$  et  $N$  étant périodiques, nous avons  $\langle \frac{d}{dy} (a(y) N(y)) \rangle = 0$ . Ainsi

$$a^0 = \langle a(y) + a(y) \frac{d}{dy} N(y) \rangle,$$

Or la solution de (18) en prenant  $N(0) = N(1) = 0$ , nous donne :

$$N(y) = \langle a^{-1} \rangle^{-1} \int_0^y a(z)^{-1} dz - y,$$

et ainsi

$$a^0 = \langle a(y) + a(y) (\langle a^{-1} \rangle^{-1} a^{-1}(y) - 1) \rangle = \langle a^{-1} \rangle^{-1}.$$

De plus nous avons  $\| \frac{d}{dx} (a^\epsilon(x) (\frac{d}{dx} u_1^\epsilon(x) - \frac{d}{dx} u^\epsilon(x))) \|_{H^1([0,1])} \leq c\epsilon$ , d'après Jikov *et al.* [5], ce qui montre que  $u_1^\epsilon$  est bien une approximation de  $u^\epsilon$ , la solution du problème de Dirichlet :

$$u^\epsilon \in H_0^1([0,1]) \quad \text{et} \quad -\frac{d}{dx} \left( a^\epsilon(x) \frac{d}{dx} u^\epsilon(x) \right) = f(x),$$

vérifiant les propriétés de convergence :

$$u^\epsilon \xrightarrow{H_0^1([0,1])} u^0 \quad \text{et} \quad a^\epsilon \frac{d}{dx} u^\epsilon \xrightarrow{L^2([0,1])} a^0 \frac{d}{dx} u^0.$$

### 3.2 Homogénéisation par une analyse multirésolution

L'analyse multirésolution décrite le paragraphe 2 nous permet d'obtenir en plus des solutions de l'équation sur chaque échelle, des résultats classiques de l'homogénéisation. En effet nous avons remarqué sa similitude avec le schéma de différences finies. Lorsque  $j$  tend vers 0, l'échelle est plus grossière, ce qui correspond à faire tendre le paramètre  $\epsilon$  vers 0 dans la méthode classique d'homogénéisation.

Sous les hypothèses de la Proposition 2.4, nous avons pour  $k = 0$  :

$$\mathbf{B}_0^{(-\infty)} x_0^{(-\infty)} + q_0^{(-\infty)} + \lambda = \mathbf{K}_0 \left( \mathbf{A}_0^{(-\infty)} x_0^{(-\infty)} + p_0^{(-\infty)} \right),$$

où  $\mathbf{A}_0^{(-\infty)}$  et  $\mathbf{B}_0^{(-\infty)}$  sont appelés les coefficients réduits de l'équation intégrale (4) :

$$(I + B(t))x(t) + q(t) + \lambda = \int_0^t (A(s)x(s) + p(s))ds,$$

pour tout  $t \in [0,1]$ .

En se restreignant à la base de Haar, il est clair que  $x_0^{(-\infty)} = \bar{x}$ , où  $\bar{x}$  est la moyenne de la solution  $x(t)$  sur  $[0,1]$ , qui est un vecteur constant. Et nous avons d'après les résultats dans la base de Haar (section 2.5) :

$$\left( I + B_0^{(-\infty)} \right) \bar{x} + q_0^{(-\infty)} + \lambda = \frac{1}{2} \left( A_0^{(-\infty)} \bar{x} + p_0^{(-\infty)} \right). \quad (19)$$

Nous cherchons les coefficients constants  $A^h$ ,  $B^h$ ,  $p^h$  et  $q^h$ , tels que la procédure de réduction dans la base de Haar de la section 2.5, appliquée à l'équation :

$$(I + B^h) x(t) + q^h + \lambda = \int_0^t (A^h x(s) + p^h)ds, \quad (20)$$

conduise au même résultat (19), pour tout  $\lambda$ . (i.e. par exemple  $(A^h)_0^{(-\infty)} = A_0^{(-\infty)}$  et de même pour les autres coefficients). C'est dans ce sens que nous appellerons ici ces coefficients : coefficients "homogénéisés".

Nous avons alors la proposition suivante, obtenue par Brewster *et al.* [3] et Coult [6] :

**Proposition 3.2** *Sous les hypothèses de la Proposition 2.4, les expressions des matrices constantes  $A^h$  et  $B^h$  et des vecteurs constants  $p^h$  et  $q^h$  sont données par les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} A^h &= A_0^{(-\infty)}, \\ B^h &= A^h \tilde{A}^{-1} - I, \\ p^h &= p_0^{(-\infty)}, \\ q^h &= q_0^{(-\infty)} + \left[ A^h \tilde{A}^{-1} (A^h)^{-1} - \frac{1}{2} I - A^h \left( \exp(\tilde{A}) - I \right)^{-1} (A^h)^{-1} \right] p^h, \end{aligned}$$

où

$$\tilde{A} \triangleq \log \left( I + \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A^h \right)^{-1} A^h \right).$$



**Preuve** D'après (12), (13), (14), (15), et (16), nous avons :

$$\begin{cases} A_k^h = A_{k-1}^h, \\ B_k^h = B_{k-1}^h + \frac{\delta_k^2}{16} A_{k-1}^h (I + B_{k-1}^h)^{-1} A_{k-1}^h, \\ p_k^h = p_{k-1}^h, \\ q_k^h = q_{k-1}^h + \frac{\delta_k^2}{16} A_{k-1}^h (I + B_{k-1}^h)^{-1} p_{k-1}^h, \end{cases} \quad (21)$$

où  $A_k^h, B_k^h, p_k^h$  et  $q_k^h$  sont les coefficients sur  $V_k$ , obtenus par la procédure de la section 2.5. L'indice  $i$ , n'intervenant plus, les coefficients étant constants, les indices  $i$  et  $(j)$  ont été supprimés, pour simplifier les notations. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} (D_G)_i &= 0, & (D_p)_i &= (D_q)_i = 0, \\ (S_G)_i &= G_{k-1}^h, & (S_p)_i &= p_{k-1}^h, \\ (S_q)_i &= q_{k-1}^h, & \text{car } (q_k^h)_i &= q_k^h = 2^{\frac{k}{2}} q^h, \end{aligned}$$

où  $G = A$  ou  $B$ .

Puisque  $A^h$  et  $p^h$  sont inchangés par réduction d'échelle, nous avons  $A^h = A_0^{(-\infty)}$  et  $p^h = p_0^{(-\infty)}$ .

Il reste à déterminer  $B^h$  et  $q^h$ . Supposons  $p_0^{(-\infty)} = 0$ , d'après (21) nous avons alors  $q_k^h = q_{k-1}^h$  et ainsi  $q^h = q_0^{(-\infty)}$ . La solution de (20) est :

$$x(t) = -\exp(\tilde{A}t) \tilde{q},$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A} &\triangleq (I + B^h)^{-1} A^h, \text{ et} \\ \tilde{q} &\triangleq (I + B^h)^{-1} (q^h + \lambda). \end{aligned}$$

Nous trouvons donc

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \left( -\int_0^1 \exp(\tilde{A}t) dt \right) \tilde{q} \\ &= \left( I - \exp(\tilde{A}) \right) \tilde{A}^{-1} \tilde{q}, \end{aligned}$$

si  $\tilde{A}$  est inversible. Nous pouvons également résoudre (19) :

$$\bar{x} = - \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A_0^{(-\infty)} \right)^{-1} \left( q_0^{(-\infty)} + \lambda \right),$$

car d'après la Proposition 2.4, nous pouvons inverser  $I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A_0^{(-\infty)}$ . Nous avons ainsi pour tout  $\lambda$  :

$$\left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A_0^{(-\infty)} \right)^{-1} \left( q_0^{(-\infty)} + \lambda \right) = \left( \exp(\tilde{A}) - I \right) \tilde{A}^{-1} \tilde{q}.$$

Nous obtenons donc

$$\left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A^h \right)^{-1} = \left( \exp(\tilde{A}) - I \right) \tilde{A}^{-1} (I + B^h)^{-1},$$

car

$$A_0^{(-\infty)} = A^h, \quad q_0^{(-\infty)} = q^h \quad \text{et} \quad \tilde{q} = (I + B^h)^{-1} (q^h + \lambda).$$

Or

$$\tilde{A} = (I + B^h)^{-1} A^h.$$

Ainsi

$$B^h = A^h \tilde{A}^{-1} - I,$$

et

$$\tilde{A} = \log \left( I + \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A^h \right)^{-1} A^h \right).$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A^h \right)^{-1} &= \left( \exp(\tilde{A}) - I \right) \tilde{A}^{-1} \tilde{A} (A^h)^{-1} \\ &= \left( \exp(\tilde{A}) - I \right) (A^h)^{-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$I + \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A^h \right)^{-1} A^h = \exp(\tilde{A}).$$

Supposons  $p_0^{(-\infty)} \neq 0$ , la solution de (20) est alors :

$$x(t) = \left( \exp(\tilde{A}t) - I \right) (A^h)^{-1} p^h - \exp(\tilde{A}t) \tilde{q}.$$

Ainsi

$$\bar{x} = \int_0^1 x(t) dt = \left( \left( \exp(\tilde{A}) - I \right) \tilde{A}^{-1} - I \right) (A^h)^{-1} p^h - \left( \exp(\tilde{A}) - I \right) \tilde{A}^{-1} \tilde{q}.$$

De plus la solution de (19) est :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A_0^{(-\infty)} \right)^{-1} \left( \frac{1}{2} p_0^{(-\infty)} - \lambda - q_0^{(-\infty)} \right) \\ &= \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A^h \right)^{-1} \left( \frac{1}{2} p^h - \lambda - q_0^{(-\infty)} \right), \end{aligned}$$

Pour  $\lambda = 0$ , nous avons

$$\bar{x} = \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A^h \right)^{-1} \left( \frac{1}{2} p^h - q_0^{(-\infty)} \right).$$

En comparant les deux expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left( I + B_0^{(-\infty)} - \frac{1}{2} A^h \right)^{-1} \left( \frac{1}{2} p^h - q_0^{(-\infty)} \right) = \\ & \left( (\exp(\tilde{A}) - I) \tilde{A}^{-1} - I \right) (A^h)^{-1} p^h - (\exp(\tilde{A}) - I) \tilde{A}^{-1} (I + B^h)^{-1} q^h. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & (\exp(\tilde{A}) - I) (A^h)^{-1} q^h = \\ & \left[ \left( (\exp(\tilde{A}) - I) \tilde{A}^{-1} - I \right) (A^h)^{-1} - \frac{1}{2} (\exp(\tilde{A}) - I) (A^h)^{-1} \right] p^h \\ & + (\exp(\tilde{A}) - I) (A^h)^{-1} q_0^{(-\infty)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} q^h &= \left[ -\frac{1}{2} I + A^h \left( \tilde{A}^{-1} - (\exp(\tilde{A}) - I)^{-1} \right) (A^h)^{-1} \right] p^h + q_0^{(-\infty)} \\ &= q_0^{(-\infty)} + \left[ A^h \tilde{A}^{-1} (A^h)^{-1} - \frac{1}{2} I - A^h (\exp(\tilde{A}) - I)^{-1} (A^h)^{-1} \right] p^h. \end{aligned}$$

□

Remarquons que l'homogénéisation par une analyse multirésolution, utilise ici la procédure de résolution d'équations, dans sa simplification de la base de Haar. **Exemple 3.3** Revenons à l'équation de Darcy :

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) = f(x),$$

où  $x \in [0,1]$ . Cette équation équivaut à :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} v(x) = -f(x), \\ \frac{d}{dx} u(x) = a(x)^{-1} v(x), \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme intégrale :

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \int_0^x \left( \begin{pmatrix} 0 & a(y)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f(y) \end{pmatrix} \right) dy.$$

D'après les notations précédentes, nous avons :

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = - \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}, \quad q(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(y) \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons que nous cherchons les constantes  $A^h$ ,  $B^h$ ,  $p^h$  et  $q^h$  telles que :

$$(\mathbf{I} + B^h) \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} + q^h + \lambda = \int_0^x \left( A^h \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix} + p^h \right) dy.$$

Suivant les résultats de Gilbert [7], nous obtenons

$$A^h = \begin{pmatrix} 0 & M_1 - 2M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $M_1 = \int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt$  et  $M_2 = \int_0^1 \frac{t - \frac{1}{2}}{a(t)} dt$ . Nous pouvons également obtenir  $p^h$  et  $q^h$ .

Ce résultat est quelque peu différent du résultat classique, qui est la moyenne harmonique:  $a^0 = \left( \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \right)^{-1}$ . En effet au lieu de partir de  $a(x)$ , prenons le coefficient de la forme  $a^\epsilon(x) = a\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ . La méthode d'homogénéisation par une analyse multirésolution, conduit à des termes  $M_1(\epsilon)$  et  $M_2(\epsilon)$ .  $a(x)$  étant périodique, d'après Coult [6], nous avons :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_1(\epsilon) = M_1,$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_2(\epsilon) = 0.$$

Nous retrouvons ainsi le coefficient homogénéisé au sens classique. De plus Gilbert [7] montre que l'erreur commise lors de la reconstruction à partir de ces coefficients homogénéisés, est comparable à celle commise par la résolution d'équation à partir des coefficients homogénéisés obtenus par la méthode classique.

Cette exemple montre que nous pouvons appliquer la méthode de l'homogénéisation par une analyse multirésolution à l'équation de Darcy dans le cas unidimensionnel. Nous obtenons naturellement le même résultat que par une méthode classique. Il n'est cependant pas possible d'écrire cette équation sous la forme d'un système de deux équations, comme ci-dessus, dans des dimensions supérieures. C'est pourquoi nous allons étudier une autre approche de l'homogénéisation des coefficients de l'équation de Darcy, en s'intéressant à l'opérateur  $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$ .

## 4 L'opérateur $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$ .

### 4.1 Cas unidimensionnel

Pour des simplifications de notations, nous noterons maintenant les opérateurs et leur représentation matricielle indistinctement.

L'opérateur  $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$  projeté dans  $V_j$ , dans le cas d'une analyse multirésolution, dans la base de Haar est donné par la matrice :

$$S_j = -\frac{1}{\delta_j^2} \Delta_+^j \text{diag}(a_j) \Delta_-^j,$$

où  $\delta_j = 2^j$  est la taille de l'échelle  $V_j$ ,  $a_j = P_j a$ ,  $\text{diag}(a_j)$  est la représentation matricielle de l'opérateur multiplication,  $\Delta_+^j$  est l'opérateur défini par la matrice de taille  $2^{-j} \times 2^{-j}$  :

$$\Delta_+^j = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$\Delta_-^j = -(\Delta_+^j)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après Dorobantu *et al.* [8], nous avons la proposition :

**Proposition 4.1** Si  $a_j = \begin{pmatrix} \tilde{a}_j \\ \bar{a}_j \end{pmatrix}$  où  $\tilde{a}_j \in W_{j+1}$  et  $\bar{a}_j \in V_{j+1}$ , nous avons

$$\text{diag}(a_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{diag}(\bar{a}_j) & \text{diag}(\tilde{a}_j) \\ \text{diag}(\tilde{a}_j) & \text{diag}(\bar{a}_j) \end{pmatrix}.$$

Regardons l'action de  $\Delta_+$  sur les fonctions de base de  $V_j = W_{j+1} \oplus V_{j+1}$ , pour tout  $k = 0, \dots, 2^{-j} - 1$

$$\begin{aligned} \Delta_+ \psi_k^{j+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta_+ (\phi_{2k}^j - \phi_{2k+1}^j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\phi_{2k}^j + \phi_{2k+1}^j + \phi_{2k+1}^j - \phi_{2k+2}^j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} [-3(\phi_{2k}^j - \phi_{2k+1}^j) - (\phi_{2k+2}^j - \phi_{2k+3}^j) \\ &\quad + (\phi_{2k}^j + \phi_{2k+1}^j) - (\phi_{2k+2}^j + \phi_{2k+3}^j)] \\ &= \frac{1}{2} (-3\psi_k^{j+1} - \psi_{k+1}^{j+1} + \phi_k^{j+1} - \phi_{k+1}^{j+1}). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}\langle \Delta_+ \psi_k^{j+1}, \psi_l^{j+1} \rangle &= \frac{1}{2} (-3\delta_{l,k} - \delta_{l,k+1}), \\ \langle \Delta_+ \psi_k^{j+1}, \phi_l^{j+1} \rangle &= -\frac{1}{2} (-\delta_{l,k} + \delta_{l,k+1}),\end{aligned}$$

où  $\delta_{l,k} = 1$  est le symbole de Kronecker. De même nous obtenons :

$$\Delta_+ \phi_k^{j+1} = \frac{1}{2} (-\psi_k^{j+1} + \psi_{k+1}^{j+1} - \phi_k^{j+1} + \phi_{k+1}^{j+1}),$$

et

$$\begin{aligned}\langle \Delta_+ \phi_k^{j+1}, \psi_l^{j+1} \rangle &= \frac{1}{2} (-\delta_{l,k} + \delta_{l,k+1}), \\ \langle \Delta_+ \phi_k^{j+1}, \phi_l^{j+1} \rangle &= \frac{1}{2} (-\delta_{l,k} + \delta_{l,k+1}).\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\Delta_+^{j-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_j & -\Delta_+^j \\ \Delta_+^j & \Delta_+^j \end{pmatrix},$$

où  $M_j$  est la matrice définie par  $M_{l,k}^j = -3\delta_{l,k} - \delta_{l,k+1}$ , avec  $l, k = 0, \dots, 2^j - 1$ . De plus, comme  $\Delta_-^j = -(\Delta_+^j)^*$  :

$$\Delta_-^{j-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -M_j^* & \Delta_-^j \\ -\Delta_-^j & \Delta_-^j \end{pmatrix}.$$

Nous avons ainsi la décomposition de  $S_j = -\frac{1}{\delta_j^2} \Delta_+^j \text{diag}(a_j) \Delta_-^j$  dans  $W_{j+1} \oplus V_{j+1}$  :

$$S_j = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4\delta_j^2} \begin{pmatrix} \Upsilon_{S_j} & (M_{j+1} - \Delta_+^{j+1}) (\bar{a}_j + \tilde{a}_j) \Delta_-^{j+1} \\ -\Delta_+^{j+1} (\bar{a}_j + \tilde{a}_j) (\Delta_-^{j+1} + M_{j+1}^*) & 2\Delta_+^{j+1} (\bar{a}_j + \tilde{a}_j) \Delta_-^{j+1} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

où

$$\Upsilon_{S_j} \triangleq \Delta_+^{j+1} \bar{a}_j \Delta_-^{j+1} - M_{j+1} \bar{a}_j M_{j+1}^* + \Delta_+^{j+1} \tilde{a}_j M_{j+1}^* - M_{j+1} \tilde{a}_j \Delta_-^{j+1}.$$

Notons que  $\Upsilon_{S_j} = 4\delta_j^2 A_{S_j}$  (voir section 2.1).

Remarquons que si nous considérons des conditions aux bords de Dirichlet, avec  $a(x)$  périodique, les matrices  $\Delta_+$ ,  $\Delta_-$  et  $M$  étant alors prises circulantes, la décomposition de  $S_j$  (22) est toujours vraie.

D'après (22), nous avons :

$$R_{S_j} = T_{j+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4\delta_j^2} \Delta_+^{j+1} (\bar{a}_j + \tilde{a}_j) (\Delta_-^{j+1} + M_{j+1}^*) \Upsilon_{S_j}^{-1} (M_{j+1} - \Delta_+^{j+1}) (\bar{a}_j + \tilde{a}_j) \Delta_-^{j+1},$$

où  $R_{S_j}$  est la représentation matricielle du complément de Schur et  $T_{j+1} = S_{j+1}$ .

Or d'après (22) :

$$S_{j+1} = -\frac{\sqrt{2}}{4\delta_j^2} \Delta_+^{j+1} (\bar{a}_j + \tilde{a}_j) \Delta_-^{j+1}.$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$R_{S_j} = -\frac{1}{\delta_{j+1}^2} \Delta_+^{j+1} H_j \Delta_-^{j+1},$$

où

$$H_j \triangleq \sqrt{2} (\bar{a}_j + \tilde{a}_j) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{a}_j + \tilde{a}_j) (\Delta_-^{j+1} + M_{j+1}^*) \Upsilon_{S_j}^{-1} (M_{j+1} - \Delta_+^{j+1}) (\bar{a}_j + \tilde{a}_j),$$

Nous appellerons  $H_j$  la matrice coefficient réduit de l'opérateur  $R_{S_j}$ .

Ainsi  $R_{S_j}$  conserve la même forme que  $S_j$ , il est donc possible d'itérer la procédure, et d'obtenir une relation de récurrence entre  $R_{S_j}^k$  et  $R_{S_j}^{k-1}$ , pour tout  $k = j, \dots, 0$  (où  $R_{S_j}^j = S_j$ ) :

$$R_{S_j}^k = \mathcal{T}_k^{(j)} - \mathcal{C}_k^{(j)} \left( \mathcal{A}_k^{(j)} \right)^{-1} \mathcal{B}_k^{(j)},$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^{(j)} &\triangleq Q_k R_{S_j}^{k-1} Q_k^*, \\ \mathcal{B}_k^{(j)} &\triangleq Q_k R_{S_j}^{k-1} P_k^*, \\ \mathcal{C}_k^{(j)} &\triangleq P_k R_{S_j}^{k-1} Q_k^*, \\ \mathcal{T}_k^{(j)} &\triangleq P_k R_{S_j}^{k-1} P_k^*. \end{aligned}$$

Ici  $P_k$  et  $Q_k$  sont les représentation matricielle des opérateurs de projection  $P_k$  et  $Q_k$ , respectivement, réduit à  $V_{k-1}$ .  $P_k^*$  et  $Q_k^*$  sont les matrices transposées des matrices  $P_k$  et  $Q_k$  respectivement.

De plus, nous avons

$$R_{S_j}^k = -\frac{1}{\delta_k^2} \Delta_+^k H_k^{(j)} \Delta_-^k,$$

où  $H_j^{(j)} = \text{diag}(a_j)$  et  $H_{j+1}^{(j)} = H_j$ . Nous obtenons donc une relation de récurrence entre  $H_k^{(j)}$  et  $H_{k-1}^{(j)}$ . En écrivant :

$$H_{k-1}^{(j)} = \begin{pmatrix} A_{H_k} & B_{H_k} \\ C_{H_k} & T_{H_k} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} A_{H_k} &\triangleq Q_k H_{k-1}^{(j)} Q_k^*, \\ B_{H_k} &\triangleq Q_k H_{k-1}^{(j)} P_k^*, \\ C_{H_k} &\triangleq P_k H_{k-1}^{(j)} Q_k^*, \\ T_{H_k} &\triangleq P_k H_{k-1}^{(j)} P_k^*. \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$R_{S_j}^{k-1} = -\frac{1}{\delta_{j+1}^2} \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{k-1} & \Upsilon_2^{k-1} \\ \Upsilon_3^{k-1} & \Upsilon_4^{k-1} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \Upsilon_1^{k-1} &\triangleq \Delta_+^k T_{H_k} \Delta_-^k - M_k A_{H_k} M_k^* + \Delta_+^k C_{H_k} M_k^* - M_k B_{H_k} \Delta_-^k, \\ \Upsilon_2^{k-1} &\triangleq (M_k (A_{H_k} + B_{H_k}) - \Delta_+^k (C_{H_k} + T_{H_k})) \Delta_-^k, \\ \Upsilon_3^{k-1} &\triangleq -\Delta_+^k ((A_{H_k} + C_{H_k}) M_k^* + (B_{H_k} + T_{H_k}) \Delta_-^k), \\ \Upsilon_4^{k-1} &\triangleq \Delta_+^k (A_{H_k} + B_{H_k} + C_{H_k} + T_{H_k}) \Delta_-^k. \end{aligned}$$

Ainsi

$$R_{S_j}^k = -\frac{1}{\delta_k^2} \left( \Upsilon_4^{k-1} - \Upsilon_3^{k-1} (\Upsilon_1^{k-1})^{-1} \Upsilon_2^{k-1} \right) = -\frac{1}{\delta_k^2} \Delta_+^k H_k^{(j)} \Delta_-^k,$$

avec

$$H_k^{(j)} = A_{H_k} + B_{H_k} + C_{H_k} + T_{H_k} + \left( (A_{H_k} + C_{H_k}) M_k^* + (B_{H_k} + T_{H_k}) \Delta_-^k \right) (\Upsilon_1^{k-1})^{-1} (M_k (A_{H_k} + B_{H_k}) - \Delta_+^k (C_{H_k} + T_{H_k})).$$

Supposons que pour un  $k$  fixé, il existe une sous-suite  $\{n_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$  telle que la limite

$$H_k^{(-\infty)} \triangleq \lim_{l \rightarrow -\infty} H_k^{(n_l)}$$

existe. Nous obtenons ainsi  $H_0^{(-\infty)}$ . Nous définissons ici aussi le coefficient ‘‘homogénéisé’’  $H^h$ , constant, tel que la procédure précédente nous donne  $(H^h)_0^{(-\infty)} = H_0^{(-\infty)}$ . Il est évident que pour tout  $j$  et  $k$  tels que  $j \leq j_0$ ,  $j \leq k \leq 0$  et pour tout  $i = 0, \dots, 2^{-k} - 1$ , nous avons :

$$\left( (H^h)_k^{(j)} \right)_i = \left( (H^h)_{k-1}^{(j)} \right)_i.$$

Ainsi  $H^h = H_0^{(-\infty)}$ . Nous aimerions faire la connexion entre  $H^h$ , le coefficient ‘‘homogénéisé’’ et le coefficient homogénéisé dans le sens classique. Dorbantu *et al.* [8] montrent que tout opérateur de multiplication sur  $V_j$  a un complément de Schur qui est la multiplication par la moyenne harmonique. Ainsi, si pour tout  $k = j, \dots, 0$ , chaque  $H_k^{(j)}$  était une matrice diagonale,  $H^h$ , normalisée par le terme obtenu en appliquant la même procédure au laplacien, serait le coefficient homogénéisé des équations classiques. En effet, l’opérateur  $-\nabla \cdot (a(x) \nabla) \cdot$  garde ainsi la même forme, et donc, la forme de l’équation de Darcy est conservée. Malheureusement  $H_k^{(j)}$  n’est pas une matrice diagonale, dans le cas général...

Dorbantu *et al.* [8] obtiennent cependant cette égalité, dans un cas très particulier :  
**Proposition 4.2** *Supposons  $a(x) = \bar{a} + \tilde{a}(x) \in V_j$  où  $\bar{a}$  est une constante et  $\tilde{a}(x) \in W_{j+1}$*



a une amplitude constante telle que  $|\tilde{a}(x)| < \bar{a}$ . Alors pour tout  $v \in L^2([0,1])$  telle que  $v$  possède une dérivée quatrième continue et bornée, il existe une constante  $C$  telle que :

$$\|R_{S_j}(P_j v(x)) - \alpha \frac{1}{\delta_j^2} \Delta_+^j \Delta_-^j (P_j v(x))\|_\infty \leq C \delta_j^2 \|v^{(4)}(x)\|_\infty,$$

où  $\alpha = \langle a^{-1} \rangle^{-1}$ .

Pour la preuve nous nous reportons à Dorobantu *et al.* [8]. Cette proposition établit que pour des fonctions  $a(x)$  très bien approchées sur un  $V_j$  suffisamment fin, et possédant suffisamment d'oscillations sur une période, nous pouvons tout de même obtenir une bonne approximation du coefficient homogénéisé, par la méthode décrite précédemment. Cependant dans les exemples 7 et 8 de la section 5.2, nous remarquons que si nous conservons simplement la moyenne harmonique sur les différentes échelles de projection, avec une amplitude variable, la convergence vers cette moyenne harmonique a toujours lieu.

## 4.2 Cas bidimensionnel

Nous considérons l'espace produit  $\mathbf{V}_j = V_j \otimes V_j$  engendré par  $\phi_k^j \otimes \phi_l^j$ , où

$$\phi_k^j \otimes \phi_l^j(x,y) = \phi_k^j(x) \phi_l^j(y).$$

Ainsi  $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-1} \oplus \mathbf{W}_{j-1}$  où  $\mathbf{W}_{j-1}$  est l'espace d'ondelette défini par :

$$\mathbf{W}_j = (W_j \otimes W_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j).$$

L'opérateur  $-\nabla \cdot (a(x,y) \nabla)$  s'écrit sur  $\mathbf{V}_j$  :

$$S_j = -\frac{1}{(\delta_j)^2} \left( \Delta_+^x A^{(1,1)} \Delta_-^x + \Delta_+^x A^{(1,2)} \Delta_-^y + \Delta_+^y A^{(2,1)} \Delta_-^x + \Delta_+^y A^{(2,2)} \Delta_-^y \right),$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_+^x (f \otimes g) &= (\Delta_+ f) \otimes g, \\ \Delta_+^y (f \otimes g) &= f \otimes (\Delta_+ g), \end{aligned}$$

de même pour  $\Delta_-^x$  et  $\Delta_-^y$ . L'opérateur de multiplication  $\mathbf{A}$  est défini par :

$$A^{(u,v)} (\phi_k^j \otimes \phi_l^j) = a^{(u,v)}(x,y) \phi_k^j(x) \phi_l^j(y).$$

Il est possible de montrer (cf Dorobantu *et al.* [8]) similairement au cas unidimensionnel, que :

$$R_{S_j} = -\frac{1}{(2\delta_j)^2} \left( \Delta_+^x H_j^{(1,1)} \Delta_-^x + \Delta_+^x H_j^{(1,2)} \Delta_-^y + \Delta_+^y H_j^{(2,1)} \Delta_-^x + \Delta_+^y H_j^{(2,2)} \Delta_-^y \right).$$

Les matrices  $H_j^{(u,v)}$  sont les matrices coefficients réduits. Comme dans le cas unidimensionnel, nous pouvons définir les coefficients  $H_0^{(-\infty)(u,v)}$ , qui seront, à une normalisation

près, les coefficients homogénéisés au sens classiques, dans le cas où  $H_k^{(-\infty)(u,v)}$  est une matrice diagonale pour tout  $k = j, \dots, 0$ .

Il est ainsi possible de calculer les coefficients homogénéisés dans des dimensions supérieures, similairement aux cas précédents. Notons cependant que plus la dimension sera importante plus le nombre d'ondelettes le sera aussi, multipliant ainsi la complexité du problème. Par exemple, dès la dimension 3, il faudra considérer 7 ondelettes.

## 5 Exemples numériques

### 5.1 Applications de la méthode de réduction dans la base de Haar

Nous allons appliquer la méthode décrite dans la section 2.5 en utilisant les équations de récurrence (12) et (13) pour obtenir une approximation de  $A_0^{(-\infty)}$  et de  $B_0^{(-\infty)}$ , puis par la Proposition 3.2, nous approcherons les coefficients homogénéisés  $A^h$  et  $B^h$ .

#### 5.1.1 Exemple 1

Nous allons étudier l'équation intégrale :

$$(1 + b(t))x(t) + 1 = i \int_0^t \alpha(s)x(s)ds, \quad (23)$$

où  $b(t)$  et  $\alpha(t)$  sont des fonctions de  $[0,1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La solution d'une telle équation est une onde se déplaçant vers la droite avec une amplitude et une fréquence variables. Nous prenons la fonction  $\alpha$  correspondant à un modèle de deux phases. C'est-à-dire que sur chaque intervalle dyadique de notre échelle  $V_j$ , la plus fine, de la procédure de résolution dans la base de Haar (section 2.5), nous supposons que  $\alpha(s)$  prend deux valeurs possibles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  avec une probabilité  $p$  et  $1-p$ , respectivement. Nous choisissons  $b(t) = -\beta t(1-t)$ . Nous avons ainsi la représentation matricielle de  $b(t)$  sur  $V_j$  :

$$diag \left\{ \beta 2^{-j} \left( \left( i^2 + i + \frac{1}{3} \right) 2^{3j} - (2i + 1) 2^{2j-1} \right) \right\}_{i=0}^{i=2^{-j}-1}.$$

Nous appliquons les équations de récurrence (12) et (13) pour obtenir  $\alpha_0^{(-\infty)}$  et  $b_0^{(-\infty)}$ , et par la Proposition 3.2, nous avons  $A^h$  et  $B^h$ . La solution de l'équation de la forme de (23) avec les coefficients homogénéisés  $\alpha^h$  et  $b^h$  est identique à la projection sur  $V_j$  de la solution du problème de départ (23).

Pour les applications numériques nous prendrons  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.0333\dots$ ,  $p = 0.25$  et  $\beta = 0.4$ . Nous nous restreindrons à  $j = -6$ , pour l'échelle de projection (voir figure 1 pour la projection de  $\alpha(t)$  et de  $b(t)$  sur  $V_{-6}$ ). En effet, les résultats obtenus sont déjà satisfaisants, et le caractère aléatoire de  $\alpha$  restreint la précision de la convergence.

Nous obtenons à l'échelle  $j = -6$ , les coefficients homogénéisés :

$$\begin{aligned} \alpha^h &= -0.000031 + i 0.051976, \\ b^h &= -0.067064 + i 0.000528. \end{aligned}$$

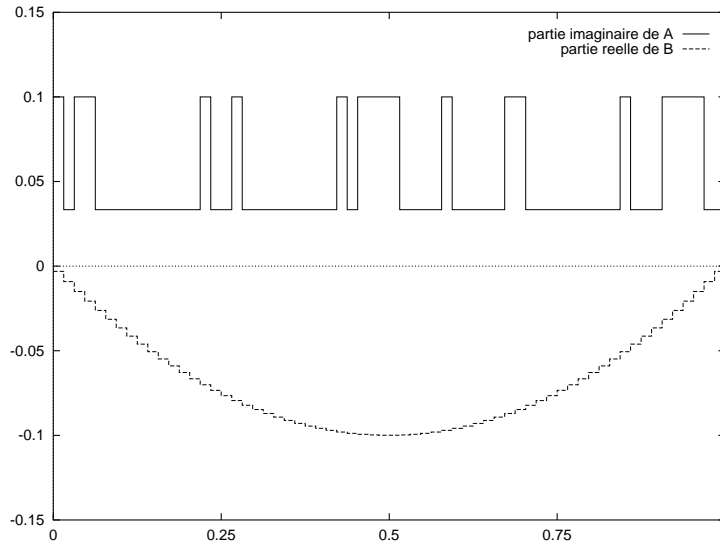


FIG. 1 – Ex 1: Projection de  $\alpha(t)$  et de  $b(t)$  sur l'échelle -6.

Les figures 2 à 5 représentent les coefficients réduits à différentes échelles, nous remarquons que si la partie réelle de  $\alpha$  et la partie imaginaire de  $b$  ne sont pas nulles, elles restent proche de 0. La faible différence numérique avec les résultats de **Brewster et al.** [3], est due à une différence de générateur de nombres aléatoires.

### 5.1.2 Exemple 2

Dans cet exemple, nous allons étudier l'équation de Darcy :

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) = 0,$$

où  $x \in [0,1]$  et  $a(x)$  sera la densité de la loi uniforme entre 1 et 2 sur chaque intervalle composant  $V_j$ , c'est à dire que ce sera un approximation d'un bruit blanc entre 1 et 2. Cet exemple est parfois utilisé dans l'ingénierie pétrolière pour simuler la perméabilité d'un milieu. Par une approche classique, le coefficient homogénéisé de  $a(x)$  n'est autre que la moyenne harmonique,  $(\ln 2)^{-1} \simeq 1.44$ . Ici aussi, le caractère aléatoire de  $a(x)$  restreint la précision de la convergence, en effet d'après la figure 6, notons que si nous augmentons la précision de projection, c'est-à-dire si  $j \leq -6$ , nous n'obtenons pas une plus grande précision pour  $a(x)$ . En projetant sur l'échelle  $j = -6$ , nous obtenons 1.4662 pour la valeur du coefficient homogénéisé, l'erreur relative est de  $1.62 \cdot 10^{-2}$ . La figure 7 représente  $a(x)$  aux différents niveaux de la procédure.

### 5.1.3 Exemple 3

Nous reprenons, ici l'équation de Darcy :

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) = 0,$$

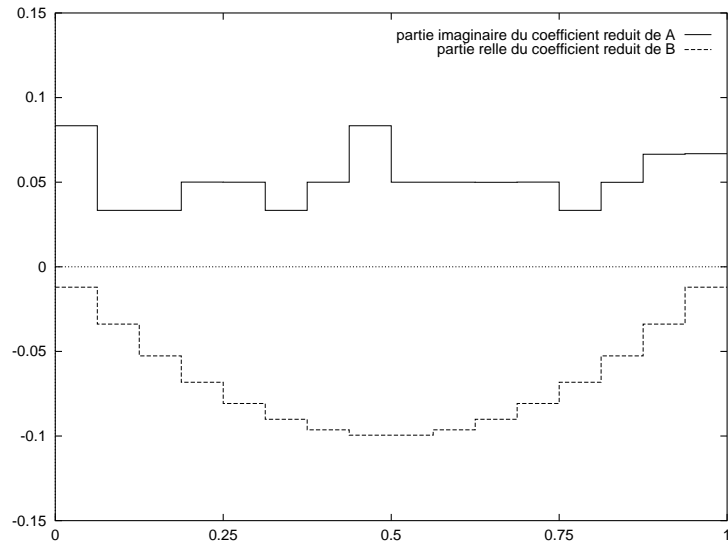


FIG. 2 – Ex 1 : Coefficients réduits sur l'échelle -4, après 2 niveaux de réduction.

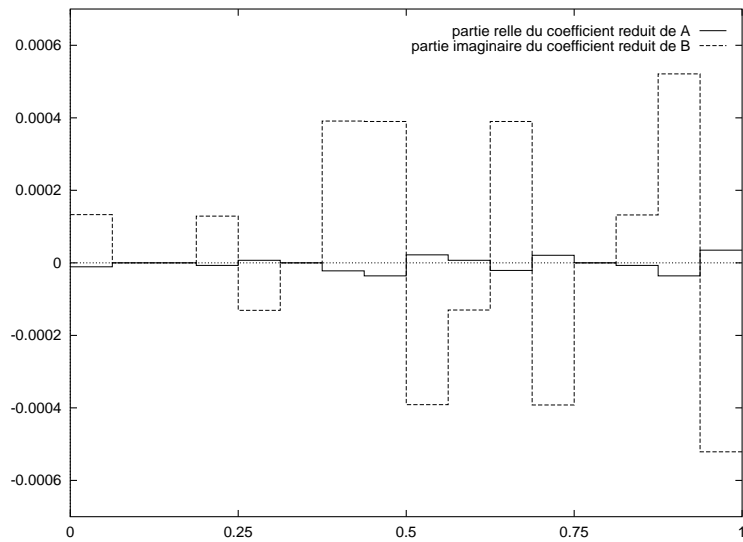


FIG. 3 – Ex 1 : Coefficients réduits sur l'échelle -4, après 2 niveaux de réduction.

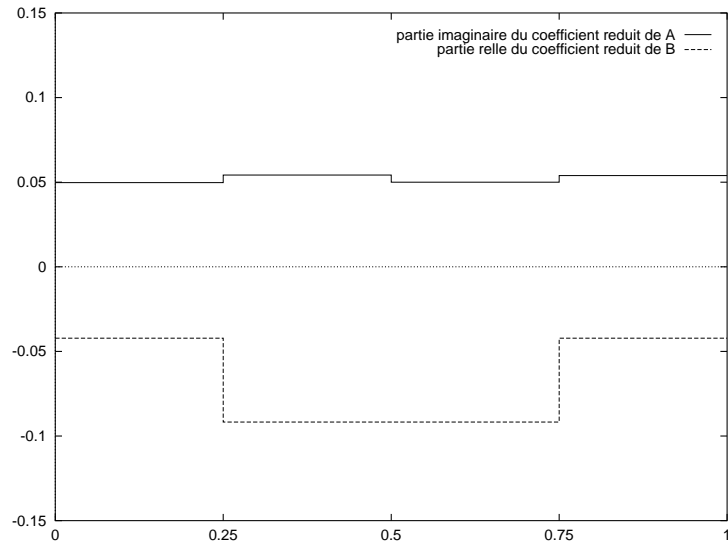


FIG. 4 – *Ex 1* : Coefficients réduits sur l'échelle -2, après 4 niveaux de réduction.

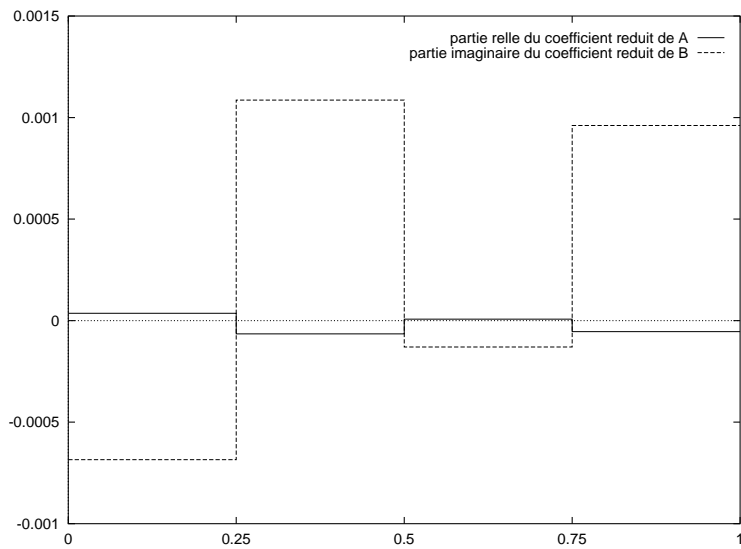


FIG. 5 – *Ex 1* : Coefficients réduits sur l'échelle -2, après 4 niveaux de réduction.

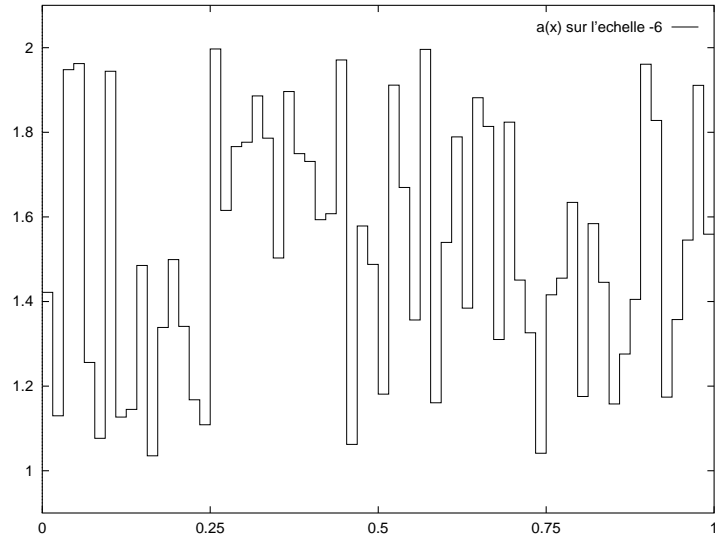


FIG. 6 – Ex 2 : Projection de  $a(x)$  sur l'échelle -6.

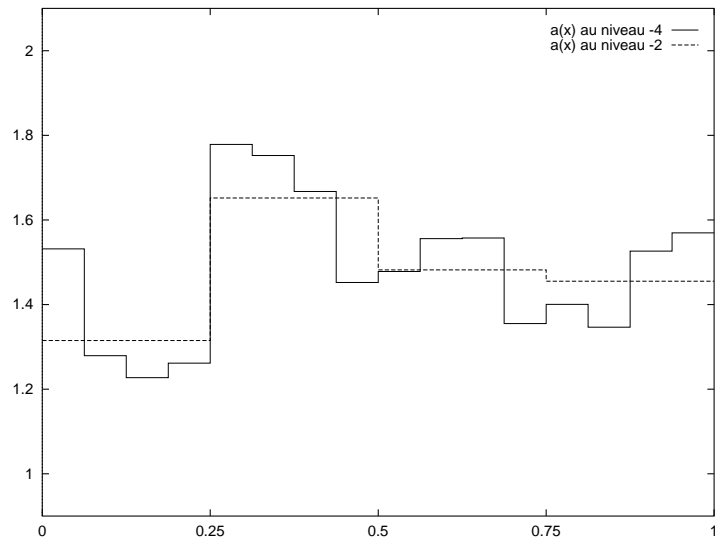


FIG. 7 – Ex 2 : Coefficients réduits de  $a(x)$  aux échelles -4 et -2.

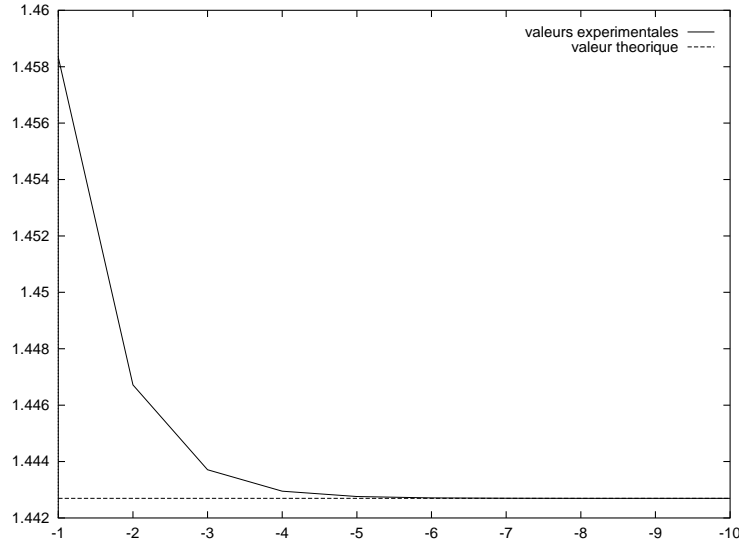


FIG. 8 – *Ex 3*: Comparaison du coefficient homogénéisé exact avec la valeur expérimentale obtenue à différentes échelles de projection.

où  $x \in [0,1]$  et  $a(x) = x + 1$ . La représentation matricielle de  $a(x)$  sur  $V_j$  est :

$$\text{diag} \left\{ 2^j i + 2^{j-1} + 1 \right\}_{i=0}^{i=2^{-j}-1}.$$

Le coefficient homogénéisé est encore  $(\ln 2)^{-1}$ . Les figures 8 et 9 nous montrent la vitesse de convergence, selon l'échelle  $V_j$  de projection de  $a(x)$ . Notons que pour  $j = -6$ , nous obtenons une erreur relative de  $1.1 \cdot 10^{-5}$ . Nous remarquons que la convergence vers le coefficient homogénéisé théorique est très bonne, dès  $j = -9$ , l'erreur relative est inférieure à  $1 e^{-6}$ .

## 5.2 Applications de la méthode de réduction de l'opérateur $-\nabla \cdot (a(x) \nabla)$ .

Nous nous intéressons ici à la méthode présentée dans la section 4.1. Comme l'ont remarqué Gines *et al.* [9], nous pouvons utiliser une alternative de la méthode de factorisation LU, pour calculer le complément de Schur  $R_{S_j}^k$ . En effet, en notant :

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_1^{k-1} & \Upsilon_2^{k-1} \\ \Upsilon_3^{k-1} & \Upsilon_4^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Upsilon}_1^{k-1} & 0 \\ \hat{\Upsilon}_3^{k-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Upsilon}_1^{k-1} & \tilde{\Upsilon}_2^{k-1} \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

nous avons :

$$R = \Upsilon_4^{k-1} - \hat{\Upsilon}_1^{k-1} \tilde{\Upsilon}_2^{k-1},$$

et ainsi

$$R_{S_j}^k = -\frac{1}{\delta_k^2} \left( \Upsilon_4^{k-1} - \hat{\Upsilon}_1^{k-1} \tilde{\Upsilon}_2^{k-1} \right).$$

Nous pouvons donc obtenir  $H_k^{(j)}$  en inversant  $\Delta_+^k$  et  $\Delta_-^k$ . L'algorithme de cette procédure est détaillé en Annexe C.

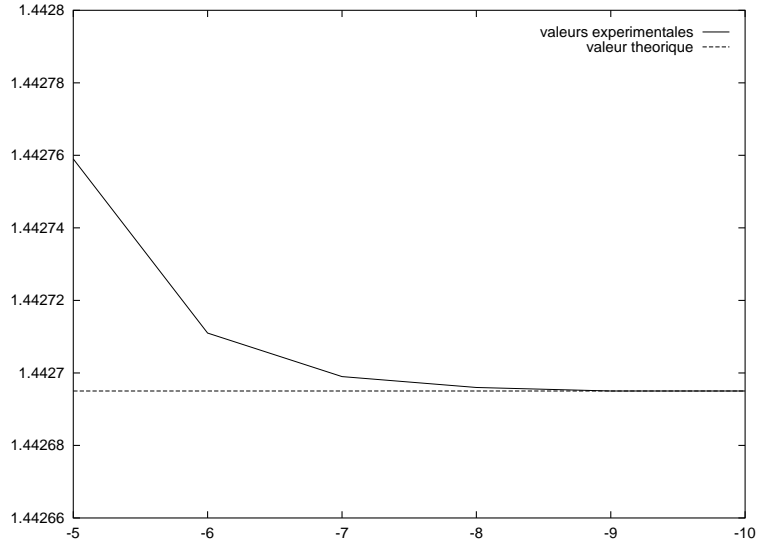


FIG. 9 – Ex 3 : Zoom de la figure 8.

### 5.2.1 Exemple 4

Commençons par regarder le cas trivial, où la perméabilité est

$$a(x) = 2 + \mathbf{1}_{E_1}(x) - \mathbf{1}_{E_2}(x),$$

avec

$$E_1 = \left\{ x \in \bigcup_{n=0}^{2^{-j}-1} [n \delta_j, (n+1) \delta_j[ , \text{où } \delta_j \text{ est le pas de l'espace de projection } V_j \right\},$$

et  $E_2$  est le complémentaire de  $E_1$  dans  $[0,1]$ . La figure 10 représente  $a(x)$  lorsque  $j = -4$ . Cette fonction  $a(x)$  a la particularité d'être déjà dans  $V_j$ , de plus, plus l'échelle de projection sera fine, plus la fréquence de l'oscillation sera importante.  $a(x)$  vérifie donc les hypothèses de la Proposition 4.2. Le coefficient homogénéisé théorique, la moyenne harmonique est ici égal à 1.5, d'après la figure 11 nous pouvons noter que plus l'échelle de départ est fine, plus l'approximation est bonne. Pour  $j = -7$ , nous avons un coefficient homogénéisé égal à 1.5088 et l'erreur relative de  $5.87 \cdot 10^{-3}$ .

### 5.2.2 Exemple 5

Nous étudions ici le cas où la perméabilité est  $a(x) = 2 + \sin(30x)$ . La représentation matricielle de  $a(x)$  sur  $V_j$  est :

$$\text{diag} \left\{ 2 - \frac{2^{-j}}{30} (\cos(2^j \cdot 30 (i+1)) - \cos(2^j \cdot 30 i)) \right\}_{i=0}^{i=2^{-j}-1}.$$



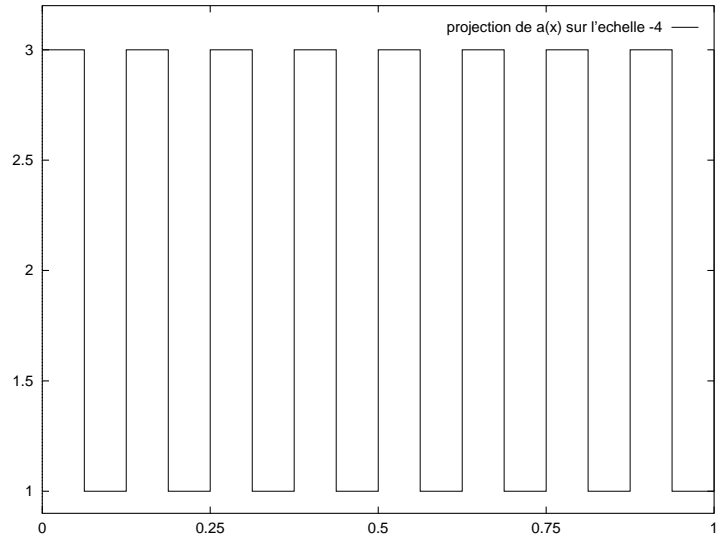


FIG. 10 – Ex 4 : Projection de  $a(x)$  sur l'échelle  $V_{-4}$ .

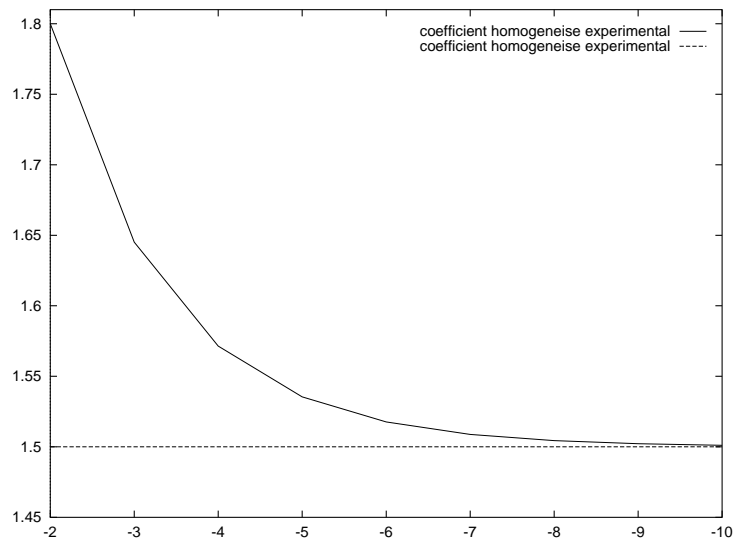


FIG. 11 – Ex 4 : Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projections.

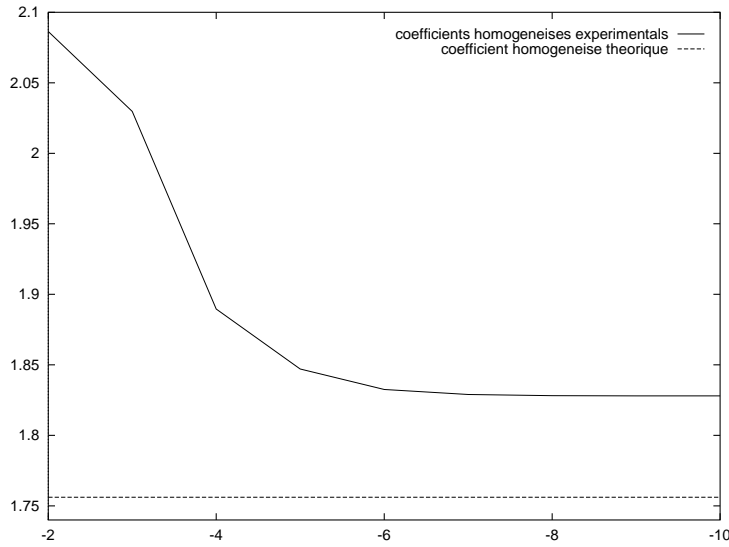


FIG. 12 – Ex 5: Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projections.

Cette fonction n’entre pas exactement dans le cadre de la Proposition 4.2; en effet la fréquence des oscillations sur  $[0,1]$  est suffisamment importante, mais  $a(x)$  n’est pas entièrement dans  $V_j$ . Nous perdons ainsi trop d’information lors de la projection sur  $V_j$ . La valeur théorique du coefficient homogénéisé est :

$$\left( \frac{29\sqrt{3}}{270} \cdot \pi - \frac{\sqrt{3}}{45} \arctan \left( \frac{-2 \tan(15) - 1}{\sqrt{3}} \right) \right)^{-1} \simeq 1.7561 .$$

D’après la figure 12, nous observons qu’il y a bien convergence mais très lentement, à partir de  $j = -6$ . À l’échelle de projection  $j = -10$ , le coefficient homogénéisé calculé est égal à 1.8279, l’erreur relative est de  $4.08 \cdot 10^{-2}$ .

### 5.2.3 Exemple 6

Nous cherchons ici à comparer la première méthode de réduction dans la base de Haar décrite en section 2.5 avec celle de réduction de l’opérateur  $-\nabla \cdot (a(x) \nabla)$ , en calculant le coefficient homogénéisé de la perméabilité  $a(x)$  de l’Exemple 2. Rappelons que la moyenne harmonique de  $a(x)$  est  $(\ln 2)^{-1} \simeq 1.44$ . La figure 13 nous présente le coefficient homogénéisé selon l’échelle initiale de projection, l’approximation sera acceptable pour un  $j \leq -6$ . Pour  $j = -6$ , rappelons que le coefficient homogénéisé calculé par la première méthode est égal à 1.44662, par la seconde méthode il est égal à 1.4376. L’erreur relative de la première méthode et de la seconde méthode est respectivement de  $1.62 \cdot 10^{-2}$  et de  $3.44 \cdot 10^{-3}$ . Le caractère aléatoire de la perméabilité empêche une franche convergence, mais ainsi définie,  $a(x)$  possède une fréquence d’oscillation d’autant plus grande que  $j$  est petit. Notons cependant que l’amplitude n’est pas constante contrairement aux hypothèses de la Proposition 4.2. Il est intéressant de remarquer (figure 14) que le temps d’utilisation

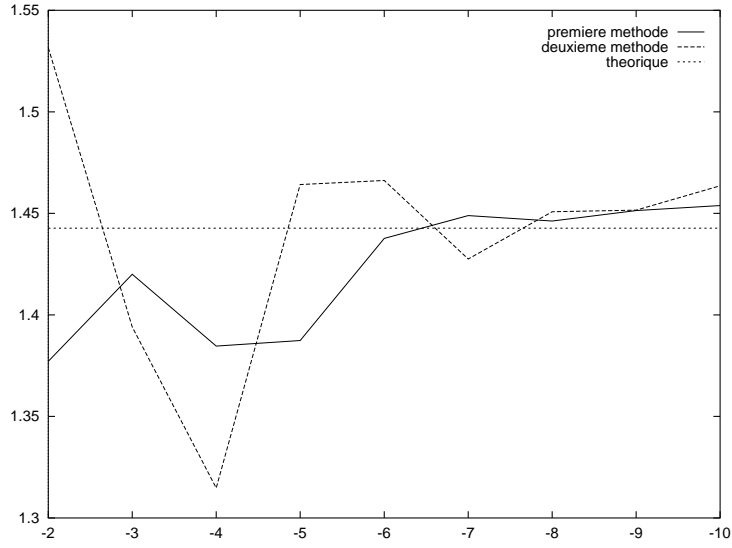


FIG. 13 – *Ex 6: Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projections, et différentes méthodes.*

du CPU est dans la deuxième méthode de 233 secondes dès que  $j = -10$ , alors qu’il reste entre 0 et 0.01s dans la première méthode.

Cette seconde méthode atteint vite des temps importants. Il est donc à prévoir que la programmation pour des dimensions supérieures à l’unité entraînera des temps d’utilisation du CPU d’autant plus important qu’il y aura d’ondelettes à considérer.

### 5.2.4 Exemple 7

Dans les deux exemples suivants, nous nous intéressons à la convergence du coefficient homogénéisé de la perméabilité  $a(x)$  ayant une forme répondant aux exigences des hypothèses de la Proposition 4.2, mais dont l’amplitude n’est pas constante. C’est à dire que  $a(x)$  est définie complètement dans l’échelle de projection  $V_j$ . Dans un premier temps nous prenons, pour tout  $x \in [0,1]$ :

$$a(x) = 2 - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{E_1} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{E_2} - \frac{3}{4}\mathbf{1}_{E_3},$$

où

$$E_1 = \left\{ x \in \bigcup_{n=0}^{2^{-j-2}-1} [(4n+1)\delta_j, (4n+2)\delta_j[ , \text{où } \delta_j \text{ est le pas de l'espace de projection } V_j \right\},$$

$$E_2 = \left\{ x \in \bigcup_{n=0}^{2^{-j-2}-1} [(4n+2)\delta_j, (4n+3)\delta_j[ , \text{où } \delta_j \text{ est le pas de l'espace de projection } V_j \right\},$$

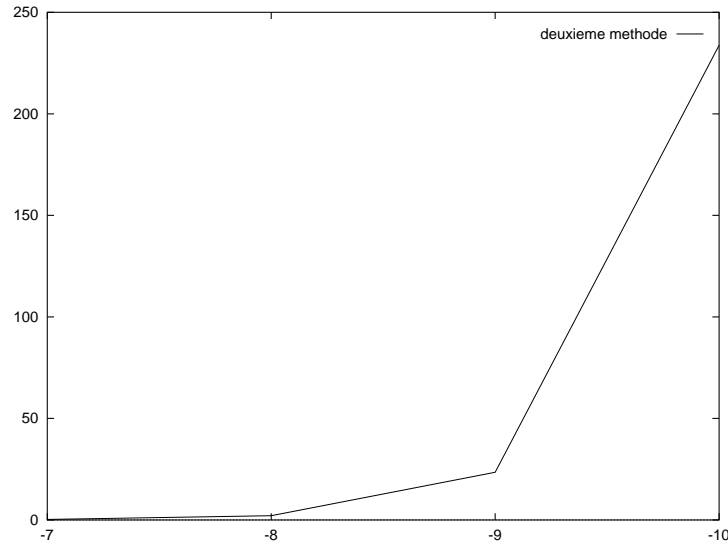


FIG. 14 – *Ex 6: Temps de calcul de la deuxième méthode, en seconde, selon différentes échelles de projections.*

$$E_3 = \left\{ x \in \bigcup_{n=0}^{2^{-j-2}-1} [(4n+3)\delta_j, 4(n+1)\delta_j[ , \text{où } \delta_j \text{ est le pas de l'espace de projection } V_j \right\}.$$

La figure 15 représente la projection de  $a(x)$  sur  $V_{-5}$ . Même si l'amplitude n'est pas constante, nous avons ici un motif répété, et la moyenne harmonique reste la même quelque soit l'échelle initiale de projection. Nous pouvons remarquer dans la figure 16 que la convergence du coefficient homogénéisé est aussi bonne que dans l'Exemple 4. La moyenne harmonique de  $a(x)$  est d'environ 1.76. Le coefficient homogénéisé calculé pour  $j = -7$  est 1.7576, et l'erreur relative est de  $3.73 \cdot 10^{-3}$ , meilleure que dans l'Exemple 4.

### 5.2.5 Exemple 8

Nous regardons à présent le cas où l'amplitude de la perméabilité est régulièrement croissante. Nous choisissons :

$$a(x) = \sum_{n=1}^{2^{-j-1}} \left[ (2 + n\delta_j) \mathbf{1}_{[(2(n-1)\delta_j, 2n\delta_j[}(x) + \frac{1}{1 - \frac{1}{2+n\delta_j}} \mathbf{1}_{[(2(n-1)\delta_j, 2n\delta_j[}(x) \right].$$

Nous gardons ainsi la même moyenne harmonique de 2, quelque soit l'échelle initiale de projection  $V_j$ . En figure 17 est représenté la projection de  $a(x)$  sur l'échelle  $V_{-5}$ . La figure 18 montre également que la convergence du coefficient homogénéisé de la perméabilité est assez rapide. Le coefficient homogénéisé expérimental, à l'échelle  $V_{-7}$ , est de 2.0017, l'erreur relative est alors égal à  $8.9 \cdot 10^{-4}$ , ici aussi meilleure que dans l'Exemple 4.

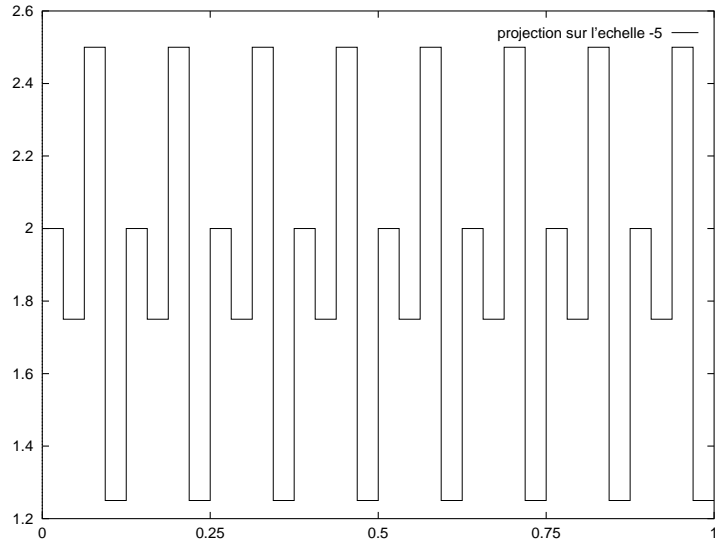


FIG. 15 – Ex 7: Représentation à l'échelle -5.

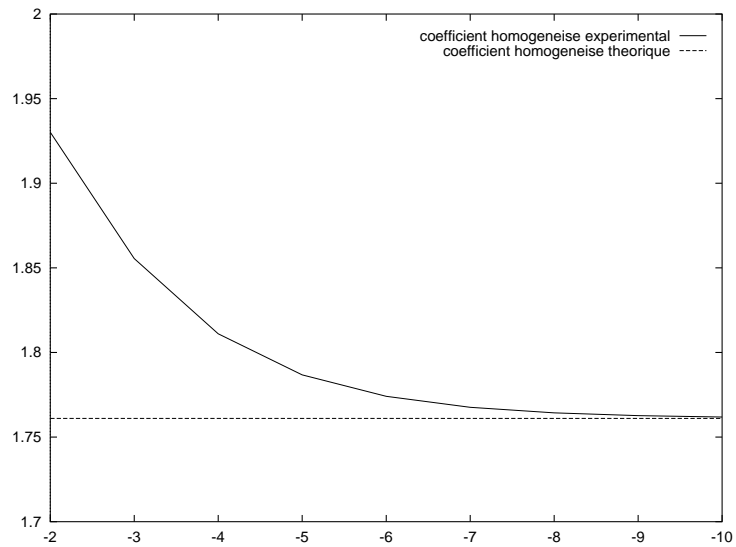


FIG. 16 – Ex 7: Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projection.

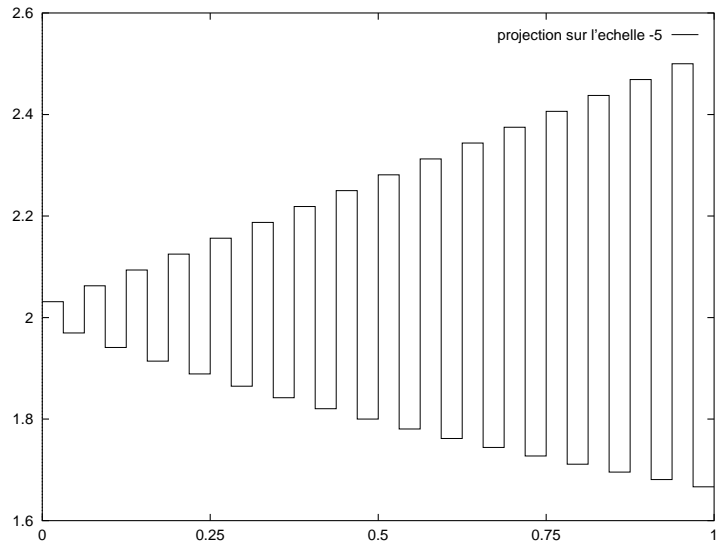


FIG. 17 – Ex 8 : Représentation à l'échelle  $V_{-5}$ .

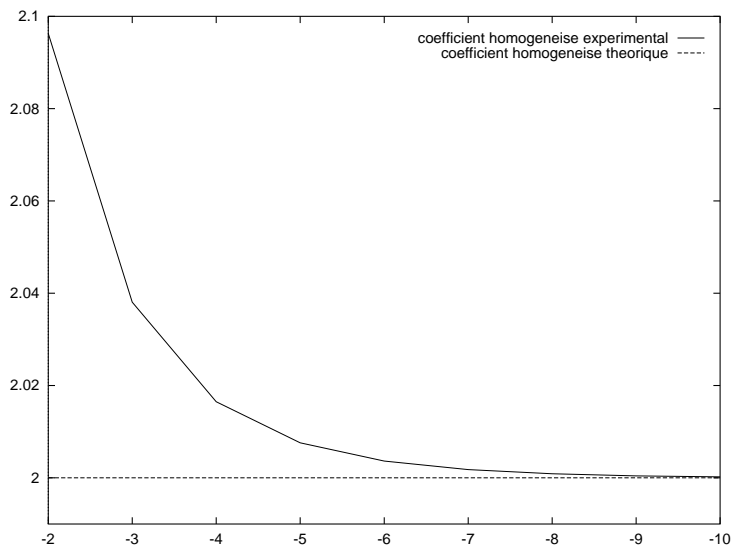


FIG. 18 – Ex 8 : Coefficients homogénéisés selon différentes échelles de projection.

## 6 Conclusion

La présente étude propose une approche du calcul des coefficients homogénéisés par une analyse multirésolution. L'étude expérimentale a montré la correspondance avec les coefficients homogénéisés obtenus par une approche plus classique. Cette approche, n'étant valable que pour certaines classes d'équations, ne permet pas d'obtenir les coefficients homogénéisés de l'équation de Darcy lorsque la dimension est supérieure à l'unité. Cette équation jouant un rôle primordial dans l'ingénierie des réservoirs pétroliers, nous avons appliqué le même type de procédure à l'opérateur  $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$ . Nous obtenons alors la possibilité d'approcher numériquement le coefficient homogénéisé de la perméabilité  $a(x)$  de l'équation de Darcy, définie dans le plan ou même dans l'espace. Cette approche restreint cependant la classe des fonctions  $a(x)$  de la perméabilité, et reste moins performante que la méthode de réduction d'équations dans le cas unidimensionnel.

L'égalité entre la définition classique du coefficient homogénéisé et celle de la procédure de réduction reste à montrer théoriquement. Pour poursuivre cette étude il serait intéressant d'étudier expérimentalement cette procédure appliquée à une autre base que celle de la base de Haar, à laquelle nous avons restreint l'étude. Ceci permettrait une approximation plus fine de la perméabilité lors de la projection initiale. De plus la méthode de "Lifting Scheme" introduite par Sweldens [10], qui permet de construire des bases d'ondelettes, en conservant des propriétés prédéfinies, peut être une alternative pour élargir la classe des fonctions  $a(x)$  de la perméabilité dans la méthode de réduction de l'opérateur  $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$ .

## Annexe

### A Quelques opérateurs dans la base de Haar

Rappelons que dans la base de Haar nous prenons :

$$\phi_k^j(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \chi_{[k2^j, (k+1)2^j]}(x), k = 0, \dots, 2^j - 1,$$

où  $\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ , et

$$\psi_k^j(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \left( \chi_{[k2^j, (k+\frac{1}{2})2^j]}(x) - \chi_{[(k+\frac{1}{2})2^j, (k+1)2^j]}(x) \right), k = 0, \dots, 2^j - 1,$$

où  $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$ . Notons

$$s_{j,k} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k^j(t)x(t)dt \quad \text{et} \quad d_{j,k} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^j(t)x(t)dt.$$

Nous avons donc

$$P_j x(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} s_{j,k} \phi_k^j(t),$$

et par définition  $\mathbf{A}_j = P_j \mathbf{A} P_j$ . Ainsi

$$\mathbf{A}_j x(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} s_{j,k} \int_0^1 A(s) \phi_k^j(s) \overline{\phi_l^j(s)} ds \phi_k^j(t).$$

Or les supports de  $\phi_k^j$  et  $\psi_l^j$  étant disjoint si  $k \neq l$ , nous obtenons

$$\int_0^1 A(s) \phi_k^j(s) \overline{\phi_l^j(s)} ds = \delta_{k,l} 2^{-j} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} A(s) ds.$$

Notons  $(A_j)_k \triangleq 2^{-j} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} A(s) ds$ .

Ainsi la représentation matricielle de  $\mathbf{A}_j$  est  $\text{diag} \{ (A_j)_i \}_{i=0}^{2^j-1}$ . De même pour l'opérateur multiplication  $\mathbf{B}$ , on note  $(B_j)_k = 2^{-j} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} B(s) ds$ , et la représentation matricielle de  $\mathbf{B}_j$  est  $\text{diag} \{ (B_j)_i \}_{i=0}^{2^j-1}$ .

Pour l'opérateur intégral, nous avons :

$$\mathbf{K}_j x(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} s_{j,k} \int_0^1 \left( \int_0^s \phi_k^j(u) du \right) \overline{\phi_l^j(s)} ds \phi_k^j(t),$$



et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left( \int_0^s \phi_k^j(u) du \right) \overline{\phi_l^j(s)} ds &= \int_0^1 2^{-j} \left( \int_0^s \chi_{[k2^j, (k+1)2^j]}(u) du \right) \chi_{[l2^j, (l+1)2^j]}(s) ds \\
&= 0 \quad \text{si } l < k \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2^j \quad \text{si } l = k \\
&= 2^j \quad \text{si } l > k,
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\int_0^s \chi_{[k2^j, (k+1)2^j]}(u) du &= 0 \quad \text{si } s < k2^j \\
&= s - k2^j \quad \text{si } k2^j < s < (k+1)2^j \\
&= 2^j \quad \text{sinon.}
\end{aligned}$$

Ainsi la représentation matricielle de  $\mathbf{K}_j$  est

$$\delta_j \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I & 0 & \dots & 0 \\ I & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ I & \dots & I & \frac{1}{2}I \end{pmatrix},$$

Notons que dans la base de Haar, nous avons :

$$\left( S_{p,k}^{(j)} \right)_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( p_{k-1}^{(j)} \right)_{2i} + \left( p_{k-1}^{(j)} \right)_{2i+1} \right),$$

$$\begin{aligned}
\text{et } \left( D_{p,k}^{(j)} \right)_i &= \frac{1}{\epsilon_k \sqrt{2}} \left( \left( p_{k-1}^{(j)} \right)_{2i} - \left( p_{k-1}^{(j)} \right)_{2i+1} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\delta_k} \left( \left( p_{k-1}^{(j)} \right)_{2i} - \left( p_{k-1}^{(j)} \right)_{2i+1} \right),
\end{aligned}$$

avec  $\epsilon_k = \frac{\delta_k}{4}$ . Les mêmes égalités sont obtenues pour  $q$ .

Calculons les différentes représentations matricielles de l'opérateur intégral, et de l'opérateur multiplication.

a)

$$Q_j \mathbf{K} Q_j x(t) = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \sum_{l=0}^{2^{-j}-1} d_{j,k} \int_0^1 \int_0^s \psi_k^j(u) du \overline{\psi_l^j(s)} ds \psi_l^j(t),$$

$$\text{et } \int_0^1 \int_0^s \psi_k^j(u) du \overline{\psi_l^j(s)} ds = 0, \quad \text{si } k \neq l,$$

car les supports de  $\psi_k^j$  et  $\overline{\psi_l^j}$  sont disjoints, et si  $k = l$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^s \psi_k^j(u) du \overline{\psi_l^j}(s) ds &= 2^{-j} \int_0^1 \int_0^s \psi(2^{-j}u - k) du \psi(2^{-j}s - k) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la représentation matricielle de  $\mathcal{A}_{\mathbf{K},j}$  est la matrice nulle.

b)

$$\frac{1}{\epsilon_j} Q_j \mathbf{K} P_j x(t) = \frac{1}{\epsilon_j} \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \sum_{l=0}^{2^{-j}-1} s_{j,k} \int_0^1 \int_0^s \phi_k^j(u) du \overline{\psi_l^j}(s) ds \psi_l^j(t),$$

or, si  $k \neq l$  nous avons

$$\int_0^1 \int_0^s \phi_k^j(u) du \overline{\psi_l^j}(s) ds = 0,$$

sinon,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^s \phi_k^j(u) du \overline{\psi_l^j}(s) ds \\ &= 2^{-j} \int_0^1 \left( \int_0^s \chi_{[k2^j, (k+1)2^j]}(u) du \right) \\ &\quad \left( \chi_{[k2^j, (k+\frac{1}{2})2^j]}(x) - \chi_{[(k+\frac{1}{2})2^j, (k+1)2^j]}(x) \right) ds \\ &= 2^{-j} \int_0^1 (s - k2^j) \left( \chi_{[k2^j, (k+\frac{1}{2})2^j]}(x) - \chi_{[(k+\frac{1}{2})2^j, (k+1)2^j]}(x) \right) ds \\ &= -\frac{2^j}{4}, \end{aligned}$$

ainsi la représentation matricielle de  $\mathcal{B}_{\mathbf{K},j}$  est donnée par  $-I$ . En remarquant que

$$\int_0^1 \int_0^s \phi_k^j(u) du \overline{\psi_l^j}(s) ds = - \int_0^1 \int_0^s \psi_k^j(u) du \overline{\phi_l^j}(s) ds,$$

nous obtenons la représentation matricielle de  $\mathcal{C}_{\mathbf{K},j}$  qui est donnée par  $I$ .

c)

$$Q_j \mathbf{G}_{j-1}^{(n)} Q_j x(t) = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \sum_{l=0}^{2^{-j}-1} d_{j,k} \int_0^1 G_{j-1}^{(n)}(s) \psi_k^j(s) \overline{\psi_l^j}(s) ds \psi_k^j(t),$$

si  $k \neq l$  nous avons :

$$\int_0^1 G_{j-1}^{(n)}(s) \psi_k^j(s) \overline{\psi_l^j}(s) ds = 0,$$

sinon en remarquant que  $|\psi_k^j(s)|^2 = 2^{-\frac{j}{2}} \phi_k^j(s)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G_{j-1}^{(n)}(s) |\psi_k^j(s)|^2 ds &= 2^{-j} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} G_{j-1}^{(n)}(s) ds \\
&= \frac{2^{-(j-1)}}{2} \left( \int_{2k2^{j-1}}^{(2k+1)2^{j-1}} G_{j-1}^{(n)}(s) ds + \int_{(2k+1)2^{j-1}}^{(2k+2)2^{j-1}} G_{j-1}^{(n)}(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( G_{j-1}^{(n)} \right)_{2k} + \left( G_{j-1}^{(n)} \right)_{2k+1} \right) \\
&= (S_{\mathbf{G}})_k .
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi la représentation matricielle de  $\mathcal{A}_{\mathbf{G},j}^{(n)}$  et de même celle de  $\mathcal{T}_{\mathbf{G},j}^{(n)}$ .

d)

$$\frac{1}{\epsilon_j} Q_j \mathbf{G}_{j-1}^{(n)} P_j x(t) = \sum_{k=0}^{2^{-j-1}} \sum_{l=0}^{2^{-j-1}} d_{j,k} \int_0^1 G_{j-1}^{(n)}(s) \phi_k^j(s) \overline{\psi_l^j(s)} ds \psi_k^j(t),$$

or  $\int_0^1 G_{j-1}^{(n)}(s) \phi_k^j(s) \overline{\psi_l^j(s)} ds = 0$  si  $k \neq l$ , sinon

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 G_{j-1}^{(n)}(s) \phi_k^j(s) \overline{\psi_l^j(s)} ds \\
&= 2^{-j} \int_0^1 G_{j-1}^{(n)}(s) \left( \chi_{[k2^j, (k+\frac{1}{2})2^j]}(x) - \chi_{[(k+\frac{1}{2})2^j, (k+1)2^j]}(x) \right) ds \\
&= 2^{-j} \left( \int_{k2^j}^{(k+\frac{1}{2})2^j} G_{j-1}^{(n)}(s) ds - \int_{(k+\frac{1}{2})2^j}^{(k+1)2^j} G_{j-1}^{(n)}(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} 2^{-(j-1)} \left( \int_{2k2^{j-1}}^{(2k+1)2^{j-1}} G_{j-1}^{(n)}(s) ds - \int_{(2k+1)2^{j-1}}^{(2k+2)2^{j-1}} G_{j-1}^{(n)}(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( G_{j-1}^{(n)} \right)_{2k} - \left( G_{j-1}^{(n)} \right)_{2k+1} \right),
\end{aligned}$$

et ainsi la représentation matricielle de  $\mathcal{B}_{\mathbf{G},j}^{(n)}$  est  $diag \{ (D_{\mathbf{G}})_i \}_{i=0}^{2^{-j}-1}$ . Nous avons de même la représentation matricielle de  $\mathcal{C}_{\mathbf{G},j}^{(n)}$ .

## B Quelques résultats classiques de l'homogénéisation

Soit  $D$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ . L'espace de Sobolev  $H^1(D)$  est le sous-espace des fonctions  $f \in L^2(D)$  telle que  $\nabla f \in L^2(D)$ . Muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H^1(D)} = (f, g) + (\nabla f, \nabla g),$$

où  $(f,g) = \int_D f(x)g(x)dx$  est le produit scalaire de  $L^2(D)$ ,  $H^1(D)$  est un espace de Hilbert. La norme associée au produit scalaire précédent est :

$$\|f\|_{H^1(D)} = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2}.$$

Nous définissons  $H_0^1(D)$  comme la fermeture de  $C_K^\infty(D)$  (espace des fonctions infiniment dérivables et à support compact dans D) dans  $H^1(D)$ .  $H_0^1(D)$  représente formellement, les fonctions de  $H^1(D)$  nulles au bord.

Notons  $H^{-1}(D)$  l'espace dual de  $H_0^1(D)$ , i.e. l'ensemble des fonctions linéaires continues définies sur  $H_0^1(D)$ . Un élément  $f \in H^{-1}(D)$  s'écrit comme  $H_0^1(D) \ni g \mapsto (f,g)$ .

Soit  $f \in [L^2(D)]^m$ , la *divergence* de  $f$  est un élément de  $H^{-1}(D)$ , noté  $\text{div } f$ , définie par :

$$(\text{div } f, \phi) = - \int_D f(x) \cdot \nabla \phi(x) dx \quad , \quad \forall \phi \in H_0^1(D).$$

Soit  $v \in [L^2(D)]^d$ , le *rotationnel* de  $v$ , noté  $\text{rot } v$ , est défini par :

$$(\text{rot } v, \phi) = \left[ - \int_D \left( v_i(x) \frac{\delta \phi(x)}{\delta x_j} - v_j(x) \frac{\delta \phi(x)}{\delta x_i} \right) dx \right]_{1 \leq i, j \leq d} \quad , \quad \forall \phi \in H_0^1(D).$$

Soit  $L_{pot}^2(\square)$  l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur la cellule de périodicité et de rotationnel nul, i.e.  $L_{pot}^2(\square) = \{f \in L^2(\square), \text{rot } f = 0\}$ .

Nous cherchons  $v \in L_{pot}^2(\square)$  solution du problème :

$$\text{div}(Av) = 0 \quad \text{et} \quad \langle v \rangle = \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

Pour chaque  $\lambda$  fixé ce problème admet une unique solution.  $\langle Av \rangle$  étant linéaire en  $\lambda$ , nous définissons  $A^0$  par :

$$\langle Av \rangle = A^0 \lambda, \tag{24}$$

où  $A^0$  est une matrice constante. Nous pouvons de même considérer le problème similaire pour l'opérateur conjugué :

Nous cherchons  $w \in L_{pot}^2(\square)$  solution du problème :

$$\text{div}(wA) = 0 \quad \text{et} \quad \langle w \rangle = \xi \in \mathbb{R}^d.$$

**Théorème :** Soit  $A(x)$  une matrice périodique, dont les composantes sont bornées, et qui est uniformément elliptique (i.e. : il existe  $\nu > 0$  tel que pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^d$  :  $\eta \cdot A(x)\eta \geq \nu|\eta|^2$ ). Soit  $A^0$  définie par (24). Alors  $A^0$  est la matrice homogénéisée de  $A(x)$ .

**Inégalité de Voigt-Reiss :** Soit  $A(x)$  une matrice vérifiant les hypothèses du théorème précédent et qui est de plus symétrique. Soit  $A^0$  définie par (24). Alors nous avons :

$$\langle A^{-1} \rangle^{-1} \leq A^0 \leq \langle A \rangle.$$

De plus  $A^0 = \langle A \rangle$  si et seulement si  $\text{div } A(x) = 0$ , et  $A^0 = \langle A^{-1} \rangle^{-1}$  si et seulement si  $\text{rot } A(x) = 0$ .

## C Algorithme de réduction de l'opérateur $-\nabla.(a(x)\nabla)$ .

Nous présentons tout d'abord un algorithme (TAB. 1) simplifié de la décomposition LU, d'après Gines *et al.*[9]. En effet, pour le calcul du complément de Schur  $R_{S_j}^k$ , nous avons :

$$R_{S_j}^k = -\frac{1}{\delta_k^2} \left( \Upsilon_4^{k-1} - \hat{\Upsilon}_1^{k-1} \tilde{\Upsilon}_2^{k-1} \right),$$

avec

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_1^{k-1} & \Upsilon_2^{k-1} \\ \Upsilon_3^{k-1} & \Upsilon_4^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Upsilon}_1^{k-1} & 0 \\ \hat{\Upsilon}_3^{k-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Upsilon}_1^{k-1} & \tilde{\Upsilon}_2^{k-1} \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

et

$$R = \Upsilon_4^{k-1} - \hat{\Upsilon}_1^{k-1} \tilde{\Upsilon}_2^{k-1}.$$

Cette algorithme a en entrée une matrice :

$$a = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2 \\ \Upsilon_3 & \Upsilon_4 \end{pmatrix},$$

et sa taille  $n$ , et rend la matrice :

$$a = \begin{pmatrix} \check{\Upsilon}_1 & \check{\Upsilon}_2 \\ \hat{\Upsilon}_3 & \Upsilon_4 \end{pmatrix},$$

où

$$\check{\Upsilon}_1 = \hat{\Upsilon}_1 - Id + \tilde{\Upsilon}_1.$$

Dans l'algorithme (TAB. 2), nous calculons la projection de l'opérateur  $-\nabla.(a(x)\nabla)$  sur l'échelle initiale  $V_j$ . Nous calculons dans un premier temps la matrice diagonale de la projection de  $a(x)$ , puis nous multiplions par  $\Delta_+^j$  et par  $\Delta_-^j$  à gauche et à droite respectivement.

Dans l'algorithme (TAB. 3), nous calculons la matrice  $H_k^{(j)}$ , mais nous ne multiplions pas par l'inverse de  $\Delta_+^j$  et de  $\Delta_-^j$  à gauche et à droite respectivement, car au pas suivant nous devrions de nouveau multiplier par  $\Delta_+^j$  et par  $\Delta_-^j$  à gauche et à droite respectivement. Ainsi après  $2^{-j} - 1$  itérations, nous trouvons une constante, dont l'opposé correctement normalisé nous donne une approximation du coefficient homogénéisé de la perméabilité  $a(x)$ . C'est en effet l'opposé car  $(\Delta_+^j)^{-1}(\Delta_-^j)^{-1} = -1$  sur  $V_0$ . La normalisation se fait en divisant par le nombre obtenue en appliquant la même procédure au laplacien, partant de la même échelle de projection initiale (i.e. en prenant  $a(n) = 1$  pour tout  $n = 0, \dots, 2^{-j} - 1$ ). Nous présentons dans le tableau ci-dessous les constantes de normalisation. Nous

aurons en entrée de l'algorithme la matrice  $H_p$ , calculée au pas précédent et le niveau  $j$  antérieur.

Constantes de normalisation	
Niveau j	Résultats expérimentals
-1	1.6
-2	2.133333
-3	2.509804
-4	2.737968
-5	2.864336
-6	2.930948
-7	2.965162
-8	2.982502
-9	2.991231
-10	2.99561

---

Nom : ludmp  
 Entrées :  $\{a(i,j)\}_{0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1}$ ,  $n$   
 Sortie :  $\{a(i,j)\}_{0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1}$

---

```

min ← e-20
si a(0,0) = 0 alors
  a(0,0) ← min
pour i = 1 ⋯ (n/2) - 1 faire
  a(i,0) ← a(i,0)/a(0,0)
fin faire
pour j = 1 ⋯ (n/2) - 1 faire
  sum ← a(j,j)
  pour k = 0 ⋯ (n/2) - 1 faire
    sum ← sum - a(j,k)a(k,j)
  fin faire
  a(j,j) ← sum
  si a(j,j) = 0 alors
    a(j,j) ← min
  pour i = j + 1 ⋯ n - 1 faire
    sum1 ← a(i,j)
    sum2 ← a(j,i)
    pour k = 0 ⋯ j - 1 faire
      sum1 ← sum1 - a(i,k)a(k,j)
      sum2 ← sum2 - a(j,k)a(k,i)
    fin faire
  fin faire
fin faire

```

---

TAB. 1 – Décomposition LU simplifiée.

---

Nom: projection sur  $V_j$   
 Entrées:  $\{a(n)\}_{0 \leq n \leq 2^j - 1}$ ,  $j$   
 Sortie:  $\{H(n,m)\}_{0 \leq n \leq 2^j - 1, 0 \leq m \leq 2^j - 1}$

---

```

pour  $n = 0 \dots 2^j - 1$  faire
  pour  $m = 0 \dots 2^j - 1$  faire
     $mat(n,n) \leftarrow 0$ 
  fin faire
   $mat(n,n) \leftarrow a(n)$ 
fin faire
pour  $n = 0 \dots 2^j - 1$  faire
  pour  $m = 0 \dots 2^j - 1$  faire
     $H(n,m) \leftarrow mat(n+1,m) - mat(n+1,m+1) - mat(n,m) + mat(n,m+1)$ 
     $H(2^j - 1,m) \leftarrow mat(2^j - 1,m+1) - mat(2^j - 1,m)$ 
  fin faire
   $H(n,2^j - 1) \leftarrow mat(n+1,2^j - 1) - mat(n,2^j - 1)$ 
fin faire
 $H(2^j - 1,2^j - 1) \leftarrow -mat(2^j - 1,2^j - 1)$ 

```

---

TAB. 2 – Projection de l'opérateur  $-\nabla \cdot (a(x)\nabla)$  sur  $V_j$ .



---

Nom : calcul de H

Entrées :  $\{H_p(n,m)\}_{0 \leq n \leq 2^j - 1, 0 \leq m \leq 2^j - 1}$ ,  $j$

Sortie :  $\{H(n,m)\}_{0 \leq n \leq 2^{j+1} - 1, 0 \leq m \leq 2^{j+1} - 1}$

---

```
pour  $n = 0 \dots 2^j - 1$  faire
  pour  $m = 0 \dots 2^j - 1$  faire
     $mat(n,m) \leftarrow (H_p(2n,2m) - H_p(2n,2m+1) - H_p(2n+1,2m) - H_p(2n+1,2m+1))/2$ 
     $mat(n,m) \leftarrow (H_p(2n,2m) + H_p(2n,2m+1) - H_p(2n+1,2m) - H_p(2n+1,2m+1))/2$ 
     $mat(n,m) \leftarrow (H_p(2n,2m) - H_p(2n,2m+1) + H_p(2n+1,2m) - H_p(2n+1,2m+1))/2$ 
     $mat(n,m) \leftarrow (H_p(2n,2m) + H_p(2n,2m+1) + H_p(2n+1,2m) + H_p(2n+1,2m+1))/2$ 
  fin faire
fin faire
ludmp(mat,  $2^j - 1$ )
pour  $n = 0 \dots 2^j - 1$  faire
  pour  $m = 0 \dots 2^j - 1$  faire
     $u \leftarrow 0$ 
    pour  $p = 0 \dots 2^j - 1$  faire
       $u \leftarrow u + mat(2^j - 1 + n, p) \times mat(p, 2^j - 1 + m)$ 
    fin faire
     $H(n,m) \leftarrow 4 \times (mat(2^j - 1 + n, 2^j - 1 + m) - u)$ 
  fin faire
fin faire
```

---

TAB. 3 – Calcul de la récurrence sur  $H_k^{(j)}$ .

## Références

- [1] H. DARCY, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Victor Dalmont, Editeur, 1856.
- [2] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs 1 : Ondelettes*, Herman, 1990.
- [3] M.E. BREWSTER and G. BEYLKIN, “A multiresolution strategy for numerical homogenization,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 2, pp. 327–349, 1995.
- [4] F. CAMPILLO ET F. CEROU, “Homogénéisation en milieu aléatoire,” Tech. Rep. 1 95 E 421, INRIA, 1996, À paraître.
- [5] V. V. JIKOV, S. M. KOZLOV, and O. A. OLEINIK, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer Verlag, 1994.
- [6] N.A. COULT, *A Multiresolution Strategy for Homogenization of Partial Differential Equations*, Ph.D. thesis, University of Colorado, 1997.
- [7] A.C. GILBERT, *Multiresolution Homogenization Scheme for Differential Equations and Applications*, Ph.D. thesis, Princeton University, 1997.
- [8] M. DOROBANTU and B. ENGQUIST, “Wavelet-based numerical homogenization,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, no. 2, pp. 540–559, April 1998.
- [9] D. GINES, G. BEYLKIN, and J. DUNN, “Lu factorisation of non-standard forms and direct multiresolution solvers,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 5, no. 2, pp. 156–201, 1998.
- [10] WIM SWELDENS, “The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets,” *J. Appl. Comput. Harmonic Analysis*, vol. 3, no. 2, pp. 186–200, 1996.
- [11] B. TORRESANI, “Représentation d’opérateurs en bases d’ondelettes,” in *notes de cours, DEA de mathématiques appliqués, Toulouse*, 1994-95.
- [12] A.C. GILBERT, “A comparison of multiresolution and classical one-dimensional homogenization schemes,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 5, no. 1, pp. 1–35, Jan. 1998.
- [13] G. BEYLKIN and N.A. COULT, “A multiresolution strategy for reduction of elliptic pde’s and eigenvalue problems,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 5, no. 2, pp. 129–155, april 1998.
- [14] G. BEYLKIN, M.E. BREWSTER, and A.C. GILBERT, “A multiresolution strategy for numerical homogenization of nonlinear odes,” *Submitted to Applied and Computational Harmonic Analysis*, June 1997.
- [15] W.H. PRESS, B.P. FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY, and W.T. VETTERLING, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1988.