Théorie de l'intégration

Polycopié de cours ENSIETA - Réf. : 1481

Arnaud MARTIN

Novembre 2004

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Historiquement il y a deux conceptions différentes de l'intégrale élaborées par Newton[1] et Leibniz. Pour Newton, l'intégration est considérée comme l'inverse de la différentiation, notamment parce que c'est la seule chance de pouvoir calculer explicitement une intégrale. Ce point de vu restera dominant durant le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle.

Pour Leibniz, les aires et les volumes sont essentiellement des sommes de rectangles et de cylindres ce qui a conduit à une interprétation géométrique intuitive de l'intégrale. Mais c'est surtout Cauchy qui imposa cette vision en partageant pour l'essentiel le point de vue de Leibniz. Il donna en 1823 la première définition précise de l'intégrale. Il utilise la notation introduite par Fourier $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, qui emploie l'intégrale comme méthode pour démontrer un grand nombre d'identités, par exemple en intégrant terme à terme des séries de fonctions. Faisant varier X, Cauchy démontre le lien entre intégration et dérivation en obtenant le théorème fondamental du calcul infinitésimal. Enfin, il souligne l'importance de démontrer l'existence des intégrales "*avant de faire connaître leurs diverses propriétés*". En effet, avant Cauchy, tout le monde intègre des fonctions en supposant que ça ne pose pas de problème.

Cauchy considérait uniquement l'intégrale des fonctions continues (en confondant continue et uniformément continue, notion non dégagée à l'époque). Riemann développa une théorie plus générale de l'intégration en 1854, ceci pour les besoins de la représentation des fonctions en séries trigonométriques.

L'intégration et surtout le concept de fonctions évolue à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, sous l'impulsion entre autres de Darboux, Jordan et Borel. En 1894, Stieljes a défini une notion d'intégrale plus générale fondée sur une généralisation simple de la mesure d'un intervalle. Elle n'est cependant pas plus profonde, car elle ne s'applique qu'aux mêmes fonctions suffisamment régulières.

C'est la théorie de la mesure qui apporta ensuite une évolution significative. Borel en 1898 définit la mesure d'un ensemble ouvert sur la droite comme la somme de la série des longueurs des intervalles qui le composent. Lebesgue, dans sa thèse en 1902, cherche

[1]Vous trouverez dans le glossaire page 67 quelques repères historiques ainsi qu'un bref rappel de définitions.

avant tout à étendre à des fonctions très générales la relation entre intégrale et dérivée. Il élargit ainsi la définition des ensembles mesurables ce qui va lui permettre d'établir les théorèmes de passage à la limite qui portent son nom, et par là élargir la définition d'intégrale.

Nous allons dans ce cours débuter par une présentation de la généralisation par Stieljes de l'intégrale de Riemann dans l'optique de rappeler les résultats de celle-ci. Nous présentons ensuite les espaces et fonctions mesurables dans le chapitre 3 sur lesquels est fondée l'intégrale de Lebesgue que nous exposons et comparons à l'intégrale de Riemann au chapitre 4. Le chapitre 5 présente les espaces $\mathbf{L}^p$ et différentes convergences de fonctions intégrables. Le chapitre 6 montre comment le théorème de Fubini élargit l'intégrale simple à l'intégrale multiple. Nous finissons par le chapitre 7 qui donne quelques propriétés de l'intégrale de Lebesgue et quelques applications telles que les transformations d'intégrales (Fourier et Laplace) et les distributions.

La théorie de l'intégration est particulièrement importante pour le physicien pour une bonne compréhension des outils qu'il manipule au quotidien. Des ouvrages simplifiés lui sont consacrés tels que [BGC94a], [Pet95] ou [Rei95] plus spécifique au traitement du signal.

Chapitre 2

Intégrale de Riemann-Stieljes

L'intégrale de Riemann étant connue, nous présentons ici l'extension proposée par Stieljes afin de revoir les résultats obtenus par Riemann. Nous nous contentons de voir le cas particulier où le pas de la partition est défini à partir d'une fonction monotone croissante.

2.1 Intégrale de Stieljes pour α monotone croissante

Considérons une partition $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n\}$ de l'intervalle fini $[a, b]$ (ainsi $x_0 = a$ et $x_n = b$) et une fonction $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{C}$, bornée (*i.e.* $\forall x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M$). Puisque f est bornée les deux valeurs $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ et $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ existent. Posons $\Delta\alpha_i = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)$, où α est une fonction monotone croissante. Les sommes supérieures et inférieures de Riemann sont données par :

$$S(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta\alpha_i, \tag{2.1}$$

et

$$I(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta\alpha_i. \tag{2.2}$$

Ces sommes définissent deux fonctions en escaliers qui encadrent la fonction f.

Définition 2.1.1 *La partition $\mathcal{P}^*$ est un* **raffinement** *de la partition $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P}^*$ contient tous les points de $\mathcal{P}$. Nous notons $\mathcal{P}^* > \mathcal{P}$ pour "$\mathcal{P}^*$ partition plus fine que $\mathcal{P}$".*

Lemme 2.1.2 *Si $\mathcal{P}^* > \mathcal{P}$ alors :*

$$S(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq S(\mathcal{P}, f, \alpha), \tag{2.3}$$

et

$$I(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \geq I(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.4}$$

Preuve Si $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup x_s$, avec $x_s \in [x_i, x_{i+1}]$, alors

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}, f, \alpha) = m_0(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + ... + m_i(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)) \\ +... + m_{n-1}(\alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1})) \\ = ... + m_i(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_s)) + m_i(\alpha(x_s) - \alpha(x_i)) + ... \end{aligned} \tag{2.5}$$

en introduisant x_s. De plus, $m_i^1 = \inf_{x \in [x_i, x_s]} f(x) \geq m_i$ et $m_i^2 = \inf_{x \in [x_s, x_{i+1}]} f(x) \geq m_i$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}, f, \alpha) &\leq ... + m_i^1(\alpha(x_s) - \alpha(x_i)) + m_i^2(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_s)) + ... \\ &= I(\mathcal{P}^*, f, \alpha). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous démontrons donc l'inégalité (2.4) du lemme, l'inégalité (2.3) se montre de la même façon. □

Nous pouvons donc définir :

$$\inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x), \tag{2.7}$$

et

$$\sup_{\mathcal{P}} I(\mathcal{P}, f, \alpha) = \underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x). \tag{2.8}$$

D'après le lemme précédent, nous avons immédiatement :

Théorème 2.1.3

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \leq \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x). \tag{2.9}$$

Définition 2.1.4 *Lorsqu'il y a égalité dans l'équation (2.9), f est dite* **intégrable au sens de Riemann-Stieljes** *et nous écrivons $f \in R(\alpha)$. La valeur de l'intégrale de Riemann-Stieljes est donnée par :*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) = \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x). \tag{2.10}$$

Définition 2.1.5 *Lorsque l'intervalle sur lequel f est intégrée est non borné, l'intégrale est dite* **impropre** *ou* **généralisée**.

Définition 2.1.6 *Pour toute fonction f bornée sur $[a, +\infty)$ telle que $f \in R(\alpha)$ sur tout segment $[a, x]$, $x \geq a$, si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t) d\alpha(t)$ existe, nous disons que $f \in R(\alpha)$ sur $[a, +\infty)$ et nous notons :*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t) d\alpha(t) = \int_a^{+\infty} f(x) d\alpha(x) \tag{2.11}$$

Remarque $\displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} f(t)d\alpha(t)$ existe si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)d\alpha(t)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)d\alpha(t)$ sont définies.

Proposition 2.1.7 *Toute fonction f bornée sur $[a,b]$ est telle que $f \in R(\alpha)$ sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall\epsilon > 0$, $\exists\mathcal{P}$ telle que $S(\mathcal{P},f,\alpha) - I(\mathcal{P},f,\alpha) \leq \epsilon$.*

Preuve Supposons $f \in R(\alpha)$ sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$ fixé, $\exists\mathcal{P}_0$ telle que $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) \leq S(\mathcal{P}_0,f,\alpha) \leq \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) + \epsilon$ et $\exists\mathcal{P}_1$ telle que $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) - \epsilon \leq I(\mathcal{P}_1,f,\alpha) \leq \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$.

Soit $\mathcal{P}^*$ la partition plus fine que $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ donnée par $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$, nous avons :

$$I(\mathcal{P}_1,f,\alpha) \leq I(\mathcal{P}^*,f,\alpha), \tag{2.12}$$

et

$$S(\mathcal{P}_0,f,\alpha) \geq S(\mathcal{P}^*,f,\alpha), \tag{2.13}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}&\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) - \epsilon \leq I(\mathcal{P}_1,f,\alpha) \leq I(\mathcal{P}^*,f,\alpha)\\ &\leq S(\mathcal{P}^*,f,\alpha) \leq S(\mathcal{P}_0,f,\alpha) \leq \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) + \epsilon.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Or

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) = \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x), \tag{2.15}$$

donc l'équation (2.14) donne :

$$S(P^*,f,\alpha) - I(P^*,f,\alpha) \leq 2\epsilon. \tag{2.16}$$

Réciproquement, supposons que $\forall\epsilon > 0$, $\exists\mathcal{P}^*$ telle que $S(\mathcal{P}^*,f,\alpha) - I(\mathcal{P}^*,f,\alpha) \leq \epsilon$. Nous avons :

$$I(\mathcal{P}^*,f,\alpha) \leq \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) \leq \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) \leq S(\mathcal{P}^*,f,\alpha), \tag{2.17}$$

donc d'après l'hypothèse :

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) - \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) \leq \epsilon, \tag{2.18}$$

et nous démontrons ainsi que $f \in R(\alpha)$ sur $[a,b]$. $\square$

Théorème 2.1.8 *Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$, bornée et α une fonction monotone croissante.*
- Si f est continue alors $f \in R(\alpha)$ pour toute fonction monotone α.
- Si f est monotone alors $f \in R(\alpha)$ si α est monotone continue.

Remarque En fait, nous avons un résultat plus fort :

Proposition 2.1.9 *Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$, bornée et α une fonction monotone croissante, il faut et il suffit que f soit continue sur $[a,b]$ sauf sur un ensemble négligeable de points pour que f soit intégrable au sens de Riemann.*

Preuve Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est uniformément continue et :
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$, $\forall x, y$ tel que $|x-y| < \delta$, nous avons $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Donc si le *diamètre de la partition* $\sup(x_{i+1} - x_i)$ est tel que $\sup(x_{i+1} - x_i) < \delta$, nous avons $M_i - m_i < \epsilon$, et :

$$S(\mathcal{P}, f, \alpha) - I(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i \leq \epsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\alpha_i = \epsilon(\alpha(b) - \alpha(a)), \tag{2.19}$$

pour toute partition $\mathcal{P}$ telle que $\mu(\mathcal{P}) = sup(x_{i+1} - x_i) < \delta$. Ainsi d'après la proposition précédente, nous avons $f \in R(\alpha)$.

Si à présent α est monotone et continue, pour n fixé, il existe une partition $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n\}$ telle que :

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \tag{2.20}$$

d'où

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}, f, \alpha) - I(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Si f est monotone croissante nous avons $M_i = f(x_{i+1})$ et $m_i = f(x_i)$. Ainsi :

$$S(\mathcal{P}, f, \alpha) - I(\mathcal{P}, f, \alpha) = \frac{(\alpha(b) - \alpha(a))(f(b) - f(a))}{n}, \tag{2.22}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui assure l'intégrabilité de f sur $[a,b]$. $\square$

Théorème 2.1.10 *Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$, bornée et α une fonction monotone croissante.*

1. *$R(\alpha)$ est une algèbre* i.e. *si f et $g \in R(\alpha)$ sur $[a,b]$, nous avons :*

- $\lambda f+\mu g \in R(\alpha)$ *et* $\lambda \int_a^b f(x)d\alpha(x)+\mu \int_a^b g(x)d\alpha(x)=\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))d\alpha(x)$
- $fg \in R(\alpha)$.

2. *Si* $f \in R(\alpha)$ *sur* $[a,b]$ *alors* $f \in R(\alpha)$ *sur* $[a,c]$ *et* $[c,b]$, $\forall c \in [a,b]$ *et*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_a^c f(x)d\alpha(x)+\int_c^b f(x)d\alpha(x). \tag{2.23}$$

3. *Si* $f \in R(\alpha)$ *alors* $|f| \in R(\alpha)$ *et*

$$|\int_a^b f(x)d\alpha(x)| \leq \int_a^b |f(x)|d\alpha(x). \tag{2.24}$$

Preuve

1. Pour montrer que $R(\alpha)$ est une algèbre, montrons que si f et $g \in R(\alpha)$ sur $[a,b]$, $\lambda f+\mu g \in R(\alpha)$, $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P},\lambda f+\mu g,\alpha) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} (\lambda f(x)+\mu g(x))\Delta\alpha_i \\ &\leq \lambda S(\mathcal{P},f,\alpha)+\mu S(\mathcal{P},g,\alpha), \end{aligned} \tag{2.25}$$

et

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P},\lambda f+\mu g,\alpha) &= \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} (\lambda f(x)+\mu g(x))\Delta\alpha_i \\ &\geq \lambda I(\mathcal{P},f,\alpha)+\mu I(\mathcal{P},g,\alpha). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Puisque f et $g \in R(\alpha)$, $\forall \epsilon>0$, $\exists \mathcal{P}$ telle que :

$$(\lambda S(\mathcal{P},f,\alpha)+\mu S(\mathcal{P},g,\alpha))-(\lambda I(\mathcal{P},f,\alpha)+\mu I(\mathcal{P},g,\alpha)) \leq \epsilon. \tag{2.27}$$

Donc $\forall \epsilon>0$, $\exists \mathcal{P}$ telle que :

$$S(\mathcal{P},\lambda f+\mu g,\alpha)-I(\mathcal{P},\lambda f+\mu g,\alpha) \leq \epsilon, \tag{2.28}$$

ce qui montre le premier point. Pour démontrer le second point, nous utilisons le lemme suivant sans démonstration :

Lemme 2.1.11 *Soit* $f \in R(\alpha)$, $f:[a,b] \longmapsto [m,M]$. *Soit* φ *une fonction continue de* $[n,m] \longmapsto \mathbb{C}$, $\varphi(f(x))$ *est définie et* $\varphi(f) \in R(\alpha)$.

Si $\varphi(t)=t^2$ et $f \in R(\alpha)$ alors $f^2 \in R(\alpha)$. Puisque f et $g \in R(\alpha)$, nous avons $(f+g)^2$ et $(f-g)^2 \in R(\alpha)$, donc $(f+g)^2-(f-g)^2 \in R(\alpha)$ et donc $4fg \in R(\alpha)$. Ainsi $R(\alpha)$ est une algèbre.

2. Nous laissons la démonstration de ce point en exercice.
3. Comme f est bornée, $|f|$ est également bornée. De plus, $|f|$ est continue aux points où f l'est donc d'après la proposition 2.1.9 $|f| \in R(\alpha)$. De plus, si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x)d\alpha(x)$. Comme $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, nous déduisons :

$$\int_a^b -|f(x)|d\alpha(x) \leq \int_a^b f(x)d\alpha(x) \leq \int_a^b |f(x)|d\alpha(x), \tag{2.29}$$

ce qui montre ce dernier point.

□

Remarque La réciproque du troisième point est fausse. En effet, soit f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 \quad \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2.30}$$

La fonction $|f|$ vaut 1 sur $[0, 1]$, elle est intégrable au sens de Riemann, alors que f a un nombre infini de point de discontinuité, elle n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

Définition 2.1.12 *f est* **absolument intégrable** *si $|f| \in R(\alpha)$.*

Théorème 2.1.13 *Si f est une fonction absolument intégrable sur $[a, +\infty)$, alors $f \in R(\alpha)$ sur $[a, +\infty)$, et*

$$|\int_a^{+\infty} f(x)d\alpha(x)| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|d\alpha(x). \tag{2.31}$$

Preuve En effet, pour tout $x \geq a$, nous avons

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \int_a^x |f(t)|dt, \tag{2.32}$$

puisque f est absolument intégrable sur $[a, +\infty)$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x |f(t)|dt$ est convergente, et f est intégrable. □

Remarque La réciproque de ce théorème est fausse. Un contre exemple peut être donné par la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ dont l'intégrale sur $[0, +\infty)$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$, mais la valeur absolue n'est pas intégrable.

Une autre façon de caractériser les intégrales de Riemann-Stieljes a été proposée par Gaston Darboux.

Définition 2.1.14 *Les sommes de Gaston Darboux sont données par :*

$D(\mathcal{P}, f, \alpha) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha_i$, *avec* $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\forall \mathcal{P}$.

Nous dirons que $D(\mathcal{P}, f, \alpha)$ *converge vers* λ *si :*

$\forall \epsilon$, $\exists \delta$, $\forall \mathcal{P}$, $\mu(\mathcal{P}) = sup(x_{i+1} - x_i) < \delta$ *et* $\forall t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, *alors* $|D(\mathcal{P}, f, \alpha) - \lambda| < \epsilon$.

Théorème 2.1.15 *Soit* $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{Q}$, *bornée et* α *une fonction monotone croissante.*

- *Si* $D(\mathcal{P}, f, \alpha)$ *converge vers* λ *alors* $f \in R(\alpha)$ *et* $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lambda$
- *La limite de* $D(\mathcal{P}, f, \alpha)$ *existe dans les deux cas suivant :*
  a) f *continue sauf en un nombre fini de points sur* $[a, b]$ *et* α *monotone.*
  b) $f \in R(\alpha)$ *et* α *monotone et continue.*

Preuve Montrons le premier point. Par hypothèse :

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$, $\mu(\mathcal{P}) < \delta$, $\lambda - \epsilon \leq D(\mathcal{P}, f, \alpha) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha_i \leq \lambda + \epsilon$. En prenant sup et inf sur $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\forall i$, nous en déduisons :

$$\lambda - \epsilon \leq \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta\alpha_i \leq \lambda + \epsilon, \tag{2.33}$$

ainsi $S(\mathcal{P}, f, \alpha) - I(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq 2\epsilon$, et $f \in R(\alpha)$ avec de plus $\lambda - \epsilon \leq \int_a^b f(x)d\alpha(x) \leq \lambda + \epsilon$, d'où le résultat.

Le deuxième point est en partie démontré, nous le laissons en exercice. □

Théorème 2.1.16 *Soit* f_n *une suite de fonctions telles que* $f_n \in R(\alpha)$. *Si* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$ *alors* $f \in R(\alpha)$ *sur* $[a, b]$ *et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x) \tag{2.34}$$

Preuve La preuve est laissée en exercice. □

2.2 Insuffisances de l'intégrale de Riemann

Nous avons vu que si une fonction f bornée sur un compact $[a, b]$ est continue sauf en un nombre fini de points, elle est intégrable au sens de Riemann. Cependant, toutes les fonctions bornées sur un compact ne sont pas intégrables au sens de Riemann. En effet, un exemple très connu est donné par Dirichlet, la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2.35}$$

En effet, comme sur tout intervalle il y a des rationnels et des irrationnels, les sommes de Darboux $D(\mathcal{P}, f, \alpha)$ dépendent du choix de t_i. Ainsi si t_i est rationnel, $D(\mathcal{P}, f, \alpha) = 0$, sinon $D(\mathcal{P}, f, \alpha) = \alpha(1)$. $D(\mathcal{P}, f, \alpha)$ ne converge donc pas et $f \notin R(\alpha)$.

Nous avons vu de plus qu'il existe des fonctions pour lesquelles le module est intégrable sur des intervalles bornés, alors qu'elles ne sont pas intégrables. Dans le cadre de la théorie développée par Lebesgue, ça ne sera plus le cas.

Chapitre 3

Espaces et fonctions mesurables

3.1 Tribu

Définition 3.1.1 *Soit X un ensemble abstrait (par exemple $\mathbb{R}$). Une* **tribu** *(également appelée* σ-**algèbre***) Θ sur l'ensemble X est une famille de sous-ensembles de X telle que :*

1. $X \in \Theta$,
2. $\forall A \in \Theta$, $A^c \in \Theta$,
3. *si* $A_n \in \Theta$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *alors* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Theta$.

Θ est donc une **classe** *non-vide de parties de X. Θ est la tribu des* **ensembles mesurables** *de X.*

Remarque Par passage au complémentaire, nous avons $\emptyset \in \Theta$ et toute intersection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

Théorème 3.1.2 *Soit une classe $\mathcal{C}$ de parties de X, définie par Θ_i $(i \in I)$ une famille non vide de tribus de X. Il existe une plus petite tribu $\sigma(\mathcal{C})$ contenant $\mathcal{C}$.*

Preuve Il est facile de vérifier que $\cap_{i\in I}\Theta_i$ (*i.e.* la collection des sous-ensembles qui appartiennent à tous les Θ_i) est une tribu et qu'elle est la plus petite. $\square$

Définition 3.1.3 *La tribu $\sigma(\mathcal{C})$ est appelée la* **tribu engendrée** *par $\mathcal{C}$.*

Exemple 3.1.4 - **Partition finie**

- Soit $\mathcal{P}$ une partition finie de X. Elle est donc définie par $\mathcal{P} = \{A_i, i \in \{1, ..., n\}\}$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ et $\cup_{i=1}^{n} A_i = X$.
  $\sigma(\mathcal{P})$ est la classe de toutes les réunions finies des A_i.
- Si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, $\sigma(\mathcal{C})$ est la tribu engendrée par la partition $\{A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \cup B\}$, où $A \setminus B = A \cap B^c$.

Plus généralement, toute tribu engendrée par une classe finie est engendrée par une partition finie. Il est ainsi possible de faire la liste de tous les éléments.

- **Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$**
  Soit $\mathcal{D} = \{D_x =]-\infty, x[,\ x \in \mathbb{R}\}$ la classe des demi-droites ouvertes. La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est définit par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{D})$.
  La tribu des boréliens est bien sûr due à Borel. Par définition $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient donc toutes les réunions dénombrables d'intervalles ouverts *i.e.* tous les ouverts de $\mathbb{R}$. C'est donc aussi la tribu engendrée par les ouverts (ou les fermés par passage au complémentaire). Contrairement aux tribus engendrées par des partitions finies, il n'est pas possible de faire la liste de tous les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, appelés **ensembles boréliens**.

3.2 Fonctions mesurables

Définition 3.2.1 *Un* **espace mesurable** *est défini par un couple* (X, Θ) *constitué de la donnée d'un ensemble* X *munie d'une tribu* Θ *de parties de* X.

Définition 3.2.2 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *et* $(Y, \mathcal{N})$ *deux espaces mesurables, une application* $f : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (Y, \mathcal{N})$ *est dite* **mesurable** *relativement à la tribu* $\mathcal{M}$ *si* $\forall N \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(N) \in \mathcal{M}$.

$f^{-1}(N) = \{x \in X : f(x) \in N\}$ est la contre image de N. $f^{-1}(N)$ pour tout $N \in \mathcal{N}$ (f mesurable ou non) est une tribu sur X, appelée **tribu engendrée par** f et notée $f^{-1}(\mathcal{N})$. f est donc mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}$.

Nous obtenons ainsi un critère pratique de mesurabilité par la proposition suivante.

Proposition 3.2.3 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (Y, \mathcal{N})$, *et* $\mathcal{C}$ *une classe quelconque sur* Y *telle que* $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{N}$. f *est mesurable si et seulement si* $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$.

Preuve La preuve repose sur le fait que pour toute fonction $f : X \longmapsto Y$ et toute classe $\mathcal{C}$ sur Y : $\sigma[f^{-1}(\mathcal{C})] = f^{-1}[\sigma(\mathcal{C})]$ (*cf.* [Mal82] pour une démonstration complète). □

Exemple 3.2.4
1. Si $Y = \mathbb{N}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors f est mesurable si et seulement si $\{x \in X : f(x) = n\} \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Si $Y = \mathbb{R}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (la tribu des boréliens), alors f est mesurable si et seulement si $\{x \in X : f(x) < t\} \in \mathcal{M}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ou encore si et seulement si $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$, pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$.
3. Si $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors si f est continue, f est mesurable. En effet, si f est continue $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, pour tout ouvert U.

Nous pouvons nous restreindre dans la suite de cette section aux fonctions mesurables réelles. Nous considérons dans un premier temps une fonction particulière qui permet entre autre de définir les fonctions *en escalier* : la **fonction indicatrice** notée $1\!\!1_A$ (également appelée **fonction caractéristique**), application de X dans $\mathbb{R}$, A étant un sous-ensemble de X, définie par :

$$1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \in A^c. \end{cases} \tag{3.1}$$

Proposition 3.2.5 *La fonction indicatrice $1\!\!1_A$ est mesurable si et seulement si A est un ensemble mesurable* i.e. *$A \in \mathcal{M}$.*

Preuve Nous savons que $1\!\!1_A$ est mesurable si et seulement si $\{x \in X : 1\!\!1_A(x) < t\} \in \mathcal{M}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (d'après l'exemple 2 précédent). Si $t \leq 0$, $\{x \in X : 1\!\!1_A(x) < t\} = \emptyset$, et $\emptyset \in \mathcal{M}$. Si $1 < t$, $\{x \in X : 1\!\!1_A(x) < t\} = X$, $X \in \mathcal{M}$. Si $0 < t \leq 1$, alors il faut et il suffit que A^c soit mesurable, donc que A soit mesurable. □

Le théorème suivant permet de caractériser une classe très large de fonctions mesurables.

Théorème 3.2.6 *Soit f et $g : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables et $H : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ continue, alors $H(f, g) : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.*

Preuve Il faut montrer que $G = H(f, g)$ est mesurable, *i.e.* que $G^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$. Or $G^{-1}(U) = \{x : (f(x), g(x)) \in H^{-1}(U)\}$. Puisque H est continue, $H^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, qui est une réunion dénombrable de pavés ouverts de $\mathbb{R}^2$:

$$H^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n \times J_n, \tag{3.2}$$

où I_n et J_n sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Donc $G^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{x : (f(x), g(x)) \in I_n \times J_n\}$. De plus $\{x : (f(x), g(x)) \in I_n \times J_n\} = \{x : f(x) \in I_n \text{ et } g(x) \in J_n) \in I_n \times J_n\} = f^{-1}(I_n) \cap g^{-1}(J_n)$. Comme f et g sont mesurables, $f^{-1}(I_n) \in \mathcal{M}$ et $g^{-1}(J_n) \in \mathcal{M}$ et donc $G^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_n) \cap g^{-1}(J_n)$ est élément de $\mathcal{M}$. □

Proposition 3.2.7 *Soit f et $g : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables, alors les applications suivantes sont mesurables :*

1. *$\lambda f + \mu g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$,*
2. *fg*
3. *$\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$*

4. f^+*,* f^- *et* $|f|$*.*

f^+ et f^- représentent respectivement la partie positive et la partie négative de f (*i.e.* $f = f^+ - f^-$). Elles sont définies par :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Elles s'écrivent également : $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = -\inf(f, 0) = \sup(-f, 0)$.

Preuve D'après le théorème 3.2.6, il est immédiat que $\lambda f + \mu g$, fg, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont mesurables, avec $H(f, g) = \lambda f + \mu g$, fg, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ respectivement.

Puisque $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$, le théorème 3.2.6 appliqué à ces fonctions H montre que ces fonctions sont mesurables.

De plus, puisque $f = f^+ - f^-$ alors $|f| = f^+ + f^-$ est la somme de deux fonctions mesurables, ainsi par le théorème 3.2.6 $|f|$ est mesurable. $\square$

De cette proposition découle le corollaire suivant qui permet d'élargir les résultats aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$:

Corollaire 3.2.8 *Soit* $f : X \longmapsto \mathbb{C}$*, et* f_1 *et* f_2 *deux fonctions de* X *dans* $\mathbb{R}$*, telles que* $f = f_1 + if_2$*.* f *est une fonction mesurable si et seulement si* f_1 *et* f_2 *sont mesurables.*

Proposition 3.2.9 *Soit* $(f_n)_{n \geq 1}$ *une suite de fonctions* $f_n : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurables alors les applications suivantes de* $(X, \mathcal{M})$ *dans* $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *sont mesurables :*

1. $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$,
2. $\limsup_{n \to +\infty} f_n$, $\liminf_{n \to +\infty} f_n$.

$\overline{\mathbb{R}}$ représente l'ensemble $[-\infty, +\infty]$. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles $]a, b[$, a et $b \in \mathbb{R}$, ou encore les demi-droites $[-\infty, a[$ ou les demi-droites $[a, +\infty[$, *etc...* Ainsi une fonction $f : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable si $\{x \in X : f(x) < t\} \in \mathcal{M}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne en particulier que $\{x \in X : f(x) = -\infty\} \in \mathcal{M}$ et $\{x \in X : f(x) = +\infty\} \in \mathcal{M}$.

La limite supérieure d'une suite de fonctions est donnée par :

$$\limsup_{n \to +\infty} f_n = \inf_n (\sup_{k \geq n} f_k), \tag{3.5}$$

et la limite inférieure par :

$$\liminf_{n \to +\infty} f_n = \sup_n (\inf_{k \geq n} f_k). \tag{3.6}$$

La suite de fonctions converge simplement si et seulement si $\limsup_{n \to +\infty} f_n(x) = \liminf_{n \to +\infty} f_n(x)$, $\forall x \in X$.

Preuve Toute suite (de fonctions ou non) réelle admet un sup et un inf dans $\overline{\mathbb{R}}$ (par exemple $f_n(x) = n$ est telle que $\sup\limits_n f_n(x) = +\infty$), ainsi qu'une limite supérieure et inférieure également dans $\overline{\mathbb{R}}$. Les applications $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} f_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n$ sont donc des applications de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Nous avons $\{x \in X : \sup\limits_n f_n(x) > t\} = \cup_n \{x \in X : f_n(x) > t\}$, ainsi si les fonctions f_n sont mesurables (*i.e.* $\{x \in X : f_n(x) > t\} \in \mathcal{M}$), $\sup\limits_n f_n$ est mesurable. Le même procédé montre que $\inf\limits_n f_n$ est mesurable.

Nous pouvons écrire la limite supérieure par : $\limsup\limits_{n\to+\infty} f_n = \inf\limits_n g_n$ avec $g_n = \sup\limits_{k\geq n} f_k$ qui est mesurable. Ainsi $\limsup\limits_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable. De la même façon $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable. $\square$

Nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.10 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $f_n : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ convergeant simplement vers f, si f_n est mesurable $\forall n \geq 1$, alors f est mesurable.*

3.3 Mesure positive

Définition 3.3.1 *Une* **mesure positive** *μ définie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ est une application de $\mathcal{M}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ satisfaisant les deux axiomes :*

- **Axiome d'additivité dénombrable** *ou de* **σ-additivité**
  Pour toute suite dénombrable $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$ (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset$, $\forall n, m \geq 1$ et $n \neq m$), alors :

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n). \tag{3.7}$$

- **Axiome de σ-finitude**
  Il existe au moins une suite dénombrable $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$ telle que :

$$X = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n \text{ et } \mu(A_n) < +\infty \ \forall n. \tag{3.8}$$

Définition 3.3.2 *Un* **espace mesuré** *est la donnée d'un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ muni d'une mesure positive μ sur $\mathcal{M}$, noté $(X, \mathcal{M}, \mu)$*

La σ-additivité permet d'établir les propriétés fondamentales suivantes des mesures positives.

Proposition 3.3.3 *Toute mesure positive vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, *si les* A_i *sont deux à deux disjoints (*σ*-additivité finie),*
3. *si* $A \subseteq B$ *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$,
4. *si* $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ *et* $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *alors* $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$,
5. *si* $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$, $\mu(A_1) < +\infty$ *et* $A = \cap_{n=1}^{+\infty} A_n$ *alors* $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

Preuve

1. Si $A_n = \emptyset$, $\forall n$, l'axiome de σ-additivité donne $\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\emptyset)$, ce qui montre que $\mu(\emptyset) = 0$.
2. En prenant $A_{n+1} = A_{n+2} = ... = \emptyset$, et puisque $\mu(\emptyset) = 0$, la σ-additivité donne $\mu\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, si les A_i sont deux à deux disjoints.
3. Si A est contenu dans B, B peut s'écrire par : $B = A \cup (B \setminus A)$, avec A et $B \setminus A$ disjoint, ainsi d'après le point 2, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$, car μ est une mesure positive.
4. Puisque $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$, A peut s'écrire $A = \cup_{n=0}^{+\infty}(A_{n+1} \setminus A_n)$, avec $A_0 = \emptyset$. $\forall n$, les ensembles mesurables $A_{n+1} \setminus A_n$ sont disjoints deux à deux, ainsi d'après l'axiome de σ-additivité :
$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \mu(A_{n+1} \setminus A_n), \tag{3.9}$$
de plus $\mu(A_{n+1} \setminus A_n) = \mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)$, donc $\mu(A) = \lim_{m\to+\infty} \mu(A_{m+1})$.
5. En posant $C_n = A_1 \setminus A_n$, nous avons $C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_n \subset ...$ et $A_1 \setminus A = \cup_{n=1}^{+\infty} C_n$. Ainsi d'après le point 4, $\mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_1 \setminus A_n)$. Puisque $\mu(A_1) < +\infty$, $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

$\square$

Dans le cas où les A_n de la suite dénombrable ne sont pas disjoints, nous avons l'**inégalité de convexité dénombrable** suivante.

Proposition 3.3.4 *Soit* A_n *de* $\mathcal{M}$*, alors :*

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n). \tag{3.10}$$

Preuve Idée de la preuve : montrer l'inégalité de convexité dans le cas fini en employant l'axiome d'additivité, puis étendre le résultat à l'aide du point 5 de la proposition 3.3.3. □

3.3.1 Exemples de mesures positives

Mesure de dénombrement : ν

Sur $(X, \mathcal{P}(X))$, la mesure de dénombrement ν est définie en posant pour toute partie A de X, $(A \subset X)$:

$$\nu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) \quad \text{si} \quad \text{card}(A) < +\infty, \\ +\infty \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Mesure de Dirac au point x_0 **:** δ_{x_0}

Sur $(X, \mathcal{M})$, la mesure de Dirac au point x_0, δ_{x_0}, est définie en posant pour tout A de $\mathcal{M}$:

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 \, \text{si} \ x_0 \in A, \\ 0 \, \text{si} \ x_0 \notin A. \end{cases} \tag{3.12}$$

Mesure sur une tribu engendrée par une partition finie

Soit $(X, \mathcal{M})$ tel que $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{P})$ où $\mathcal{P}$ est une partition finie ($\mathcal{P} = \{A_i, i \in \{1, ..., n\}\}$). Une mesure positive sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ est parfaitement déterminée par les quantités $\mu(A_i)$ de $\overline{\mathbb{R}}^+$. En effet, tout élément A de $\mathcal{M}$ peut s'écrire comme une réunion disjointe finie de A_i, et donc $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

Mesure bornée

Une **mesure bornée** μ définie sur $(X, \mathcal{M})$ est une mesure positive avec $\mu(X) < +\infty$. Ainsi $\forall A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) \leq \mu(X)$.

Probabilité

Une probabilité définie sur $(X, \mathcal{M})$ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$.

Si $\mathcal{M}$ est engendrée par une partition finie, une probabilité sur $(X, \mathcal{M})$ est alors parfaitement déterminée par les quantités $p_i = \mu(A_i)$, $1 \leq i \leq n$, vérifiant $0 \leq p_i$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Dans le cas plus général, en utilisant la suite dénombrable $(A_n)_{n\geq 1}$ de l'axiome de σ-finitude, pour tout élément $A \in \mathcal{M}$, une mesure positive μ peut être déterminée à partir de la probabilité sur $(X, \mathcal{M})$ définie par :

$$p_n(A) = \frac{\mu(A \cap A_n)}{\mu(A_n)}. \tag{3.13}$$

En effet :

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) p_n(A). \tag{3.14}$$

Mesure image

Soit $f : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (Y, \mathcal{N})$ une fonction mesurable et μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$. La mesure positive ν définie sur $(X, f(\mathcal{M}))$ par : $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ pour tout $A \in f(\mathcal{M})$ s'appelle la **mesure image** de μ par f. Nous laissons en exercice la démonstration qu'une telle image existe bien.

3.3.2 Mesures boréliennes

Définition 3.3.5 *Une* **mesure borélienne** *est une mesure positive définie sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Définition 3.3.6 *Une mesure borélienne μ est* **localement finie** *si pour tout intervalle I borné de $\mathbb{R}$ $\mu(I) < +\infty$.*

Rappelons qu'un intervalle borné I de $\mathbb{R}$ s'écrit $I = \{[a, b[: -\infty < a \leq b < +\infty\}$, avec a et b dans $\mathbb{R}$. Cette classe de mesures est particulièrement importante pour la suite de ce cours.

Proposition 3.3.7 *Soit μ une mesure borélienne localement finie, $a \in \mathbb{R}$ et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F_a(t) = \begin{cases} \mu([a, t[) & si \quad t > a, \\ -\mu([t, a[) & si \quad t \leq a. \end{cases} \tag{3.15}$$

La fonction F_a vérifie les propriétés suivantes :

1. *F_a est croissante,*
2. *F_a est continue à gauche,*
3. *$\mu(\mathbb{R}) = F_a(+\infty) - F_a(-\infty)$.*

Preuve 1. $\forall s \in \mathbb{R}$ tel que $s < t$, $F_a(t) - F_a(s) = \mu([s,t[) > 0$, donc F_a est croissante.

2. Soit (t_n) une suite de $\mathbb{R}$ qui tend vers t lorsque n tend vers l'infini. L'intervalle $[t_n, t[$ converge donc vers $\emptyset$. D'après le point 5 de la proposition 3.3.3 nous avons $F_a(t) - F_a(t_n)$ qui tend vers 0. Ainsi F_a est continue à gauche.

3. $\mathbb{R}$ peut être vu comme la limite de l'intervalle $[-n, n[$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi :

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n \to +\infty} F_a(n) - F_a(-n) = F_a(+\infty) - F_a(-\infty). \tag{3.16}$$

□

C'est en fait le théorème réciproque qui nous intéresse particulièrement. La démonstration longue et fastidieuse n'est pas donnée ici (*cf.* par exemple [Gra88]).

Théorème 3.3.8 *Soit une fonction* $F : \mathbb{R} \longmapsto \overline{\mathbb{R}}^+$*, croissante et continue à gauche, alors il existe une unique mesure positive* μ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que pour tout* a *et* b *réels avec* $(a < b)$ *:*

$$\mu([a,b[) = F(b) - F(a). \tag{3.17}$$

Cette mesure caractérisée par Stieljes comme une extension de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ porte le nom de mesure de Stieljes (ou Stieljes-Lebesgue) associée à F. Deux cas particuliers sont importants.

Cas particuliers

1. **Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$**
   Soit $F(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. F est croissante et continue à gauche. Il existe donc une unique mesure λ telle que pour tout a et b réels avec $(a < b)$: $\lambda([a,b[) = b - a$ qui est la longueur de l'intervalle $[a, b[$. La mesure λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; elle prolonge aux boréliens la fonction *longueur* définie sur les intervalles.
2. **Probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$**
   Une probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est parfaitement définie par sa **fonction de répartition** $F_P(x) = P(]-\infty, x[)$, où F_P est une application croissante, continue à gauche, telle que $F_P(-\infty) = 0$ et $F_P(+\infty) = 1$.

3.3.3 Ensembles négligeables

Définition 3.3.9 *Soit un espace mesuré* $(X, \mathcal{M}, \mu)$*, un ensemble mesurable* E *(de* $\mathcal{M}$*) est* μ-**négligeable** *(ou de* μ-**mesure nulle***) si* $\mu(E) = 0$.

Proposition 3.3.10 *Une réunion dénombrable d'ensembles* μ*-négligeables est* μ*-négligeable.*

Preuve En utilisant l'inégalité de convexité dénombrable (3.10) : $\mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$, dans le second membre tous les termes sont nuls, donc la somme vaut zéro. □

Définition 3.3.11 *Une propriété* (P) *est vraie* μ-**presque partout** *si l'ensemble* $\{x \in X : (P)(x)$ *fausse* $\}$ *est* μ*-négligeable.*

En abrégé nous notons "μ-p.p.", en probabilité nous disons presque sûr.

Exemple 3.3.12 Soit (P) la propriété "x est irrationnel, avec $x \in \mathbb{R}$".

Nous savons que l'ensemble où (P) n'est pas vérifiée est $\mathbb{Q}$. Nous cherchons à calculer $\lambda(\mathbb{Q})$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. L'espace des rationnels est dénombrable, donc nous pouvons écrire : $\mathbb{Q} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{r_n\}$ et donc :

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\{r_n\}). \tag{3.18}$$

Soit F telle que $F(b) - F(a) = \lambda([a, b[)$, et (x_n) une suite qui tend vers x telle que $x_n \geq x$, $\forall n$. D'après le point 5 de la proposition 3.3.3, nous avons $F(x_n) - F(x)$ qui tend vers $\lambda(\{x\})$. Ainsi $\lambda(\{x\}) = F(x^+) - F(x)$. Or pour la mesure de Lebesgue $F(x) = x$ est continue donc $\lambda(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Nous en déduisons que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, et que presque tout réel est irrationnel.

Nous pouvons étendre la définition de mesurabilité au contexte presque partout.

Définition 3.3.13 $f : (X, \mathcal{M}) \longmapsto (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *est mesurable si* f *est définie* μ*-p.p. et si* $\forall V$ *ouvert de* $\overline{\mathbb{R}}$*,* $f^{-1}(V) \cap E^c$ *est mesurable, où* $E = \{x \in X : f(x)$ *non définie* $\}$*.*

Chapitre 4

Intégration de fonctions mesurables

Nous allons d'abord considérer les fonctions mesurables positives. L'intégrale d'une fonction mesurable positive est classiquement étudiée dans un premier temps dans le cas particulier des fonctions en escalier. Dans ce chapitre nous désignons par $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

4.1 Intégrale de fonctions mesurables positives

Définition 4.1.1 *Une fonction $g : X \longmapsto \mathbb{R}$ est dite* **en escalier** *(ou* **étagée***) si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs réelles. Nous noterons $E_s(\mathcal{M})$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Ainsi nous avons $g(X) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, avec $a_i \in eR$, $a_1 < a_2 < ... < a_n$ et l'ensemble des $A_i = g^{-1}(\{a_i\})$ pour $1 \leq i \leq n$ est une partition de X. La fonction g peut s'écrire sous sa **forme canonique** :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}. \tag{4.1}$$

Définition 4.1.2 *Soit $g : X \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction en escalier, pour tout $E \in \mathcal{M}$ son intégrale est définie par :*

$$\int_E g d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E), \tag{4.2}$$

avec la convention $0 \times \infty = 0$ afin que la fonction nulle soit une intégrale nulle, même sur un ensemble de mesure infinie. Cette intégrale se lit : "intégrale de g sur E par rapport à la mesure μ".

Exemple 4.1.3 - Si $g = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{M}$, alors $\int_X g d\mu = \mu(A)$.

- Si $\mu = \delta_{x_0}$, la mesure de Dirac au point x_0, alors $\displaystyle\int_X g d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(x_0) = f(x_0)$.

- Si $g = \mathbb{1}[a,b[$ et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue, alors $\displaystyle\int_X g d\lambda = (b-a)$.

Les principales propriétés de l'intégrale sont données dans la proposition suivante :

Proposition 4.1.4 *Pour toutes fonctions en escalier f et $g : X \longmapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ mesurables positives, nous avons :*

1. *Pour tout $E \in \mathcal{M}$, $\int_E f d\mu = \int_X f \mathbb{1}_E d\mu$.*
2. *Pour tout A et $B \in \mathcal{M}$ tels que $A \subseteq B$, $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.*
3. *$\int_X c f d\mu = c \int_X f d\mu$, $\forall c \in \mathbb{R}^+$.*
4. *$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.*
5. *Si $f \leq g$, $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.*
6. *$\int_X f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout.*

Preuve

1. Pour toute fonction positive en escalier f, $\displaystyle\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E)$. De plus $X = E \cup E^c$ avec $E \cap E^c = \emptyset$, donc par l'additivité de μ, nous avons $\mu(A_i \cap X) = \mu(A_i \cap E) + \mu(A_i \cap E^c)$, ainsi $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{E^c} f d\mu$. Donc $\displaystyle\int_X f \mathbb{1}_E d\mu = \int_E f \mathbb{1}_E d\mu + \int_{E^c} f \mathbb{1}_E d\mu$. Le deuxième terme étant nul, nous montrons le premier point. Cette propriété, nous permet de restreindre l'étude à X.
2. Soit $A' \in \mathcal{M}$ tel que $B = A \cup A'$ soit disjointe. Comme précédemment, nous avons :
$$\int_B f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A'} f d\mu. \tag{4.3}$$
Puisque $\int_{A'} f d\mu \geq 0$, nous avons $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
3. $\int_X c f d\mu = c \int_X f d\mu$, $\forall c \in \mathbb{R}^+$ est évident en reprenant les définitions.
4. Montrons que si $E = \cup_{j=1}^{+\infty} E_j$, avec les E_j disjoints, alors :
$$\int_E f d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{E_j} f d\mu, \tag{4.4}$$
ce qui est équivalent au fait que ν définie par $\nu(E) = \displaystyle\int_E f d\mu$ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$. En effet :
$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_i \cap E_j) \right). \tag{4.5}$$

Donc :

$$\nu(E) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E_j) \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \nu(E_j). \tag{4.6}$$

La réciproque est l'objet du théorème de Radon-Nicodym ou Lebesgue-Nicodym [God03], [Gra88].

Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$. Posons $E_{ij} = A_i \cap B_j$, alors $X = \cup_{i,j} E_{ij}$ et donc :

$$\int_X (f+g) d\mu = \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} (f+g) d\mu = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(E_{ij}), \tag{4.7}$$

puisque sur E_{ij}, $f = a_i$ et $g = b_j$. Or $\sum_j a_i \mu(E_{ij}) = a_i \sum_j \mu(E_{ij}) = a_i \mu(A_i)$ donc $\sum_{i,j} a_i \mu(E_{ij}) = \sum_i a_i \mu(A_i) = \int_X f d\mu$. Nous montrons ainsi le résultat.

5. Il suffit d'écrire $g = f + (g - f)$, avec $(g - f)$ fonction en escalier mesurable positive. Donc :

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X (g - f) d\mu \geq \int_X f d\mu. \tag{4.8}$$

6. Si $f = 0$ μ-presque partout, il existe un ensemble négligeable $N \in \mathcal{M}$ tel que $f(x) = 0$ pour tout point de $X \setminus N$. Nous avons alors $f \leq +\infty.\mathbb{1}_N$, d'où $\int_X f d\mu \leq +\infty.\mu(N) = +\infty.0 = 0$.

   Inversement, si $\int_X f d\mu = 0$, posons $A_n = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right]\right)$ pour tout $n \geq 1$. Nous avons donc $\frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n} \leq f$, d'où $\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_X f d\mu$. Ainsi $\mu(A_n) = 0$, or l'ensemble $A = \cup_{n\geq 1} A_n$ est tel que $\mu(A) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = 0$. L'ensemble A est donc négligeable, et ce n'est autre que l'ensemble des points x de X tels que $f(x) \neq 0$.

□

Nous remarquons que pour montrer ce dernier point, nous n'avons pas utilisé le fait que f soit une fonction en escalier. Nous montrons ainsi que l'équivalence est vraie pour des fonctions positives mesurables intégrables avec la définition suivante.

Définition 4.1.5 *Soit $f : X \longmapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ mesurable, pour tout $E \in \mathcal{M}$ son intégrale est définie par :*

$$\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \in E_s(\mathcal{M}) \\ 0 \leq g \leq f}} \int_E g d\mu. \tag{4.9}$$

Lemme 4.1.6 *Soit $f : X \longmapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ mesurable, alors il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ croissante de fonctions mesurables en escalier positives telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Preuve Vérifier en exercice que :

$$f_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n} 1\!\!1_{f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]\right)} + n 1\!\!1_{f^{-1}([n,+\infty])} \tag{4.10}$$

définie une telle suite. □

Le principal résultat de cette section est le théorème suivant dit de convergence monotone ou encore de Beppo Levi qui permet de voir l'intégrale comme une limite de suite.

Théorème 4.1.7 Théorème de la convergence monotone

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ qui converge simplement vers f, alors f est une fonction mesurable positive telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu. \tag{4.11}$$

Ce théorème donne les conditions pour le passage de la limite sous le signe somme. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ peut par exemple être une suite de fonctions en escalier.

Preuve Soit $I_n = \int_X f_n d\mu$, puisque (f_n) est une suite croissante, (I_n) est une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}^+$ qui converge vers un nombre $I \in [0, +\infty]$. De plus $f \geq f_n$, $\forall n$, donc nous avons $\int_X f d\mu \geq I$.

Soit s une fonction en escalier mesurable positive telle que $0 \leq s \leq f$ et c un réel tel que $0 < c < 1$, nous notons $A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\}$. D'après la proposition 3.2.3 nous avons $A_n \in \mathcal{M}$, car les fonctions f_n sont mesurables et que $A_n = (f - cs)^{-1}(]0, +\infty[)$. De plus comme la suite (f_n) est croissante $A_n \subseteq A_{n+1}$. Si $A = \cup_n A_n$, alors d'après le point 4 de la proposition 3.3.3 nous avons $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. De plus $X = A$, en effet si pour x fixé, $f(x) = 0$, alors $s(x) = 0$ et $x \in A_1$, sinon $f(x) > 0$, et puisque $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ et $f(x) > cs(x)$ dans ce cas, pour n assez grand $f_n(x) > cs(x)$ et donc $x \in A_n$.

Nous avons :

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq c \int_{A_n} s d\mu. \tag{4.12}$$

Comme $X = \cup_n A_n$ et que l'application $A \longmapsto \displaystyle\int_A s d\mu$ est une mesure (*cf.* la preuve du point 4 de la proposition 4.1.4), d'après le point 3 de la proposition 3.3.3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} s d\mu = \int_X s d\mu$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \geq c \int_X s d\mu, \tag{4.13}$$

pour tout $0 < c < 1$ et $0 \leq s \leq f$, donc $I \geq \displaystyle\int_X f d\mu$.

Puisque $\displaystyle\int_X f d\mu \geq I$, nous montrons le théorème. □

Comme corollaire, nous obtenons toutes les propriétés de la proposition 4.1.4 établies pour les fonctions en escalier, en écrivant une fonction mesurable positive comme limite d'une suite de fonctions en escalier mesurables positives. L'existence d'une telle suite est assurée par le lemme 4.1.6. Un autre résultat immédiat est le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.8 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, alors :*

$$\int_X \sum_{n\geq 1} f_n d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n d\mu \tag{4.14}$$

Preuve Il suffit de considérer la suite croissante $g_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i$. En utilisant le point 4 de la proposition 4.1.4 étendue aux fonctions mesurables positives et à l'aide du théorème de convergence monotone, l'égalité est obtenue. □

Un autre corollaire important qui porte le nom de lemme de Fatou peut être déduit du théorème de convergence monotone.

Corollaire 4.1.9 Lemme de Fatou
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, alors

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{4.15}$$

Preuve Posons $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Nous avons donc :

$$a_n = \int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu = b_n, \tag{4.16}$$

et donc $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n$. Puisque (g_n) est une suite croissante positive qui converge vers $\liminf_{n\to+\infty} f_n$, d'après le théorème de convergence monotone, nous obtenons :

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu. \tag{4.17}$$

$\square$

4.2 Intégrale de fonctions mesurables

Définition 4.2.1 *Soit f une fonction mesurable sur un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, f est dite* **intégrable** *si*

$$\int_X |f| d\mu < +\infty. \tag{4.18}$$

Définition 4.2.2 *Soit f une fonction mesurable sur un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'intégrale de f est définie par :*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu. \tag{4.19}$$

Cette définition est naturelle puisque f^+ et f^- sont deux fonctions positives, qui sont mesurables si f l'est. De la même façon, il est possible de définir l'intégrale d'une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$, comme la somme de deux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Les propriétés de l'intégrale pour les fonctions positives et en escalier (*cf.* proposition 4.1.4) sont donc toujours valables. Nous avons ainsi les propriétés données dans la proposition suivante.

Proposition 4.2.3 *1. Si f et g sont intégrables, nous avons pour tout α, β réels :*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu. \tag{4.20}$$

2. Pour tout f intégrable :

$$|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu. \tag{4.21}$$

Preuve

1. Nous avons clairement $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$. En posant $h = f + g$, nous avons $h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, donc $h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$, qui sont des fonctions mesurables positives. Ainsi, nous avons :

$$\int_X (h^+ + f^- + g^-)d\mu = \int_X (f^+ + g^+ + h^-)d\mu. \tag{4.22}$$

   En remplaçant h par $f + g$, nous obtenons l'additivité :

$$\int_X (f + g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \tag{4.23}$$

   ce qui montre la linéarité de l'intégrale. De plus, il est évident que l'intégrale est une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions intégrables, car $\forall f \geq 0$, $\int_X f d\mu \geq 0$.

2. Par définition, si f est intégrable $|f|$ qui est positive l'est aussi. De plus $-|f| \leq f \leq |f|$, donc :

$$|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu. \tag{4.24}$$

□

Théorème 4.2.4 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que :

1. $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ *μ-presque partout,*
2. *il existe une fonction g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ μ-presque partout.*

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu. \tag{4.25}$$

Preuve Nous pouvons supposer, quitte à modifier f_n sur un ensemble négligeable, que f_n tend vers f partout et que $|f_n| \leq g$ partout. Nous avons donc $|f| \leq g$, f est donc intégrable. De plus, $|f - f_n| \leq 2g$ et $\lim_{n\to+\infty} |f - f_n| = \liminf_{n\to+\infty} |f - f_n| = 0$. Ainsi, en appliquant le lemme de Fatou à la suite de fonctions mesurables positives $2g - |f - f_n|$, nous avons :

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X (2g - |f - f_n|)d\mu, \tag{4.26}$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_X (2g-|f-f_n|)d\mu = \int_X 2g d\mu - \liminf_{n\to+\infty}\int_X |f-f_n|d\mu. \tag{4.27}$$

Ainsi :

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_X |f-f_n|d\mu = 0, \tag{4.28}$$

d'où le résultat puisque :

$$\left|\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f-f_n|d\mu. \tag{4.29}$$

□

4.3 Intégrale de Riemann *vs* intégrale de Lebesgue

Définition 4.3.1 *L'***intégrale de Lebesgue** *d'une fonction f mesurable est l'intégrale de f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, λ.*

Définition 4.3.2 *Une fonction mesurable f est* **intégrable au sens de Riemann** *sur $[a,b]$, $(-\infty < a < b < +\infty)$, s'il existe deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ u_n et v_n telles que :*

$$u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots \leq f \leq \ldots \leq v_{n+1} \leq v_n, \tag{4.30}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (v_n(x)-u_n(x))dx = 0. \tag{4.31}$$

Nous avons alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b v_n dx.$

Proposition 4.3.3 *Soit f une fonction mesurable intégrable au sens de Riemann sur un intervalle borné $[a,b]$, alors f est intégrable au sens de Lebesgue et les deux intégrales sont égales.*

La définition de l'intégrale de Lebesgue recouvre ainsi l'intégrale de Riemann.

Preuve Si u est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors $\int_a^b u(x)dx = \int_a^b u(x)d\lambda(x)$. Puisque $u_1 \leq f \leq v_1$, f est intégrable et :

$$\int_a^b u_n(x)dx \leq \int_a^b f(x)d\lambda(x) \leq \int_a^b v_n(x)dx. \tag{4.32}$$

De plus $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b v_n(x)dx$, donc $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d\lambda(x)$.
□

Remarque La réciproque est fausse, il n'y a donc pas équivalence entre l'intégrabilité au sens de Riemann et l'intégrabilité au sens de Lebesgue. En effet, reprenons la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{4.33}$$

Nous avons déjà vu qu'une telle fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann (*cf.* section 2.2 page 10). De plus, l'ensemble $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ qui est un borélien (*cf.* exercice 2.1) est λ-négligeable ($\lambda([a,b] \cap \mathbb{Q}) = 0$ car $\lambda(\{x\}) = 0$). Donc f est intégrable au sens de Lebesgue et d'intégrale nulle.

Proposition 4.3.4 *Soit f une fonction mesurable intégrable au sens de Riemann sur un intervalle borné $[0,a]$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,+\infty[$ si et seulement si :*

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty. \tag{4.34}$$

Preuve Par définition f est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$. Le théorème de convergence monotone entraîne que :

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |f(x)|\mathbb{1}_{[0,n]}(x)d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n |f(x)|dx. \tag{4.35}$$

Donc f est intégrable si et seulement si $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$. □

Nous avons également si f est intégrable au sens de Lebesgue, alors le théorème de convergence dominée entraîne que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx. \tag{4.36}$$

Théorème 4.3.5 *Soit f une fonction mesurable, alors f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si f est continue λ-presque partout.*

Nous ne démontrons pas ce théorème somme toute assez intuitif à partir de la proposition 2.1.9, car la preuve reste compliquée à établir. Ainsi, au presque partout près, Riemann ne savait intégrer que des fonctions continues. Il avait cependant défini des intégrales généralisées, que deviennent ces intégrales au sens de Lebesgue ?

Considérons φ une fonction positive λ-presque partout continue. L'intégrale généralisée de Riemann est donnée par :

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx. \tag{4.37}$$

Puisque :

$$\int_0^t \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathbb{1}_{[0,t]}(x)d\lambda(x), \tag{4.38}$$

nous définissons une suite t_n qui tend vers l'infini, alors $f_n(x) = \varphi(x)\mathbb{1}_{[0,t_n]}(x)$ est une suite croissante. D'après le théorème de convergence monotone, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x)\mathbb{1}_{[0,t_n]}(x)d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n\to+\infty} \varphi(x)\mathbb{1}_{[0,t_n]}(x)d\lambda(x), \tag{4.39}$$

avec à gauche l'intégrale généralisée de Riemann et à droite l'intégrale de Lebesgue.

Il faut cependant prendre garde que certaines fonctions peuvent avoir une intégrale généralisée de Riemann, sans être intégrable au sens de Lebesgue. En effet, si nous reprenons l'exemple de la fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$, elle n'est pas intégrable au sens de Lebesgue car $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| d\lambda(x) = \int_0^{+\infty}\frac{|\sin(x)|}{x}dx = +\infty$, alors qu'elle possède une intégrale généralisée de Riemann, dans ce cas l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$ est dite **semi-convergente**.

Chapitre 5

Espace $\mathbf{L}^p$, et convergences

5.1 Définitions

Définition 5.1.1 *Nous notons par* $\mathbf{L}^p(X,\mathcal{M},\mu)$ *l'ensemble des fonctions mesurables sur* $(X,\mathcal{M},\mu)$*, définies* μ*-presque partout et telles que :*

$$\int_X |f|^p d\mu < +\infty. \tag{5.1}$$

Ainsi $\mathbf{L}^1(X,\mathcal{M},\mu)$ est l'espace des fonctions intégrables au sens de l'intégrale des fonctions mesurables sur $(X,\mathcal{M},\mu)$.

Proposition 5.1.2 *Soit*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.2}$$

pour toute fonction (réelle ou complexe) mesurable. Nous avons :

$$f \in \mathbf{L}^p \Leftrightarrow \|f\|_p < +\infty, \tag{5.3}$$

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0 \ \mu - presque\ partout, \tag{5.4}$$

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha|\ \|f\|_p,\ \forall \alpha \in \mathbb{Q}. \tag{5.5}$$

Preuve La première équivalence est évidente et les relations (5.4) et (5.5) découlent directement de la proposition 4.1.4. $\square$

Proposition 5.1.3 Inégalité de Hölder

Soit f *et* g *deux fonctions de* $\mathbf{L}^1$ *et* p *et* q *conjugués avec* $(1 < p < +\infty)$, (i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$)*, alors*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{5.6}$$

Preuve Nous pouvons nous restreindre à $0 < \|f\|_p < +\infty$ et $0 < \|g\|_q < +\infty$. En effet, d'après la relation (5.4), $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-presque partout et donc $\|fg\|_1 = 0$ μ-presque partout. Soit $F = \dfrac{f}{\|f\|_p}$ et $G = \dfrac{g}{\|g\|_q}$, F et G sont donc de $\mathbf{L}^1$ et

$$\int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1. \tag{5.7}$$

Puisque la fonction qui à tout x associe e^x est convexe, pour tout t de $[0,1]$ et tous réels x et y :

$$te^x + (1-t)e^y \geq e^{tx+(1-t)y}. \tag{5.8}$$

En posant $t = \dfrac{1}{p}$, $1 - t = \dfrac{1}{q}$, $e^x = F^p$ et $e^y = G^q$, nous avons :

$$\frac{F^p}{p} + \frac{G^q}{q} \geq FG. \tag{5.9}$$

En intégrant cette inégalité par rapport à μ sur X et d'après l'équation (5.7), nous avons :

$$\int_X FG d\mu \leq 1, \tag{5.10}$$

qui s'écrit aussi :

$$\int_X fg d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q, \tag{5.11}$$

qui est l'inégalité de Hölder. □

Proposition 5.1.4 Inégalité de Minkowski

Soit f et g deux fonctions de $\mathbf{L}^p$ et p tel que $1 < p < +\infty$, alors

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{5.12}$$

Preuve Nous pouvons nous restreindre à $\|f+g\|_p > 0$, $\|f\|_p < +\infty$ et $\|g\|_p < +\infty$, sinon l'inégalité est évidente. La fonction qui à tout x associe x^p avec $x > 0$ et $p > 1$ est convexe. En appliquant l'inégalité (5.8) pour $t = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons :

$$\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f^p + g^p\right), \tag{5.13}$$

ainsi en intégrant :

$$\|f+g\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right). \tag{5.14}$$

Ainsi, si $\|f\|_p < +\infty$ et $\|g\|_p < +\infty$, $\|f+g\|_p < +\infty$.

Or $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$. L'inégalité de Hölder appliquée à f et $(f+g)^{p-1}$ donne :

$$\int_X f(f+g)^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{5.15}$$

avec p et q conjugués. Donc

$$\left(\int_X (f+g)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X (f+g)^p \right)^{\frac{1}{q}} = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{5.16}$$

l'inégalité (5.15) s'écrit alors :

$$\int_X f(f+g)^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \, \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}, \tag{5.17}$$

de même nous avons :

$$\int_X g(f+g)^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \, \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{5.18}$$

Ainsi en intégrant $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$, nous avons :

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p). \tag{5.19}$$

Puisque nous avons vu que $\|f+g\|_p < +\infty$ et que $p - \dfrac{p}{q} = 1$, nous obtenons l'inégalité de Minkowski :

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{5.20}$$

□

Proposition 5.1.5 *L'espace* $\mathbf{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$*, avec* $p < +\infty$ *est un espace vectoriel normé, la norme étant définie par :*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.21}$$

Preuve C'est immédiat à partir des relations (5.4), (5.5) et de l'inégalité de Minskowski.
□

Remarque Cette proposition n'est pas tout à fait correcte car $\|f\|_p = 0$ n'entraîne pas $f = 0$, mais $f = 0$ μ-presque partout. Il suffit en fait d'identifier deux fonctions μ-presque partout égales, *i.e.* la relation d'équivalence : $f = g$ μ-presque partout et $f \in \mathbf{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ équivaut à $g \in \mathbf{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Remarque Une constatation importante est le fait que le nombre 2 est son propre conjugué. Nous avons ainsi des propriétés intéressantes pour l'espace $\mathbf{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$, en particulier le théorème de Fischer et Riesz.

Théorème 5.1.6 *Soit f et g deux fonctions de $\mathbf{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$, et soit*

$$< f, g >= \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x). \tag{5.22}$$

L'espace des fonctions de $\mathbf{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ est un espace hermitien muni du produit scalaire $< f, g >$.

Preuve En effet, nous avons les propriétés suivantes :
- La fonction qui à f associe $< f, g >$ est linéaire,
- $< f, g >= \overline{< f, g >}$,
- $< f, f >\geq 0$, et $< f, f >= 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout.

$\square$

5.2 Convergences

Définition 5.2.1 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathbf{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.*
- *La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge* **en moyenne au sens $\mathbf{L}^1$** *si $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$, nous notons : $f_n \underset{\mathbf{L}^1}{\longrightarrow} f$.*
- *La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge* **au sens de presque partout** *si $\mu\{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$, nous notons : $f_n \underset{\mu\text{-}pp}{\longrightarrow} f$.*
- *La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge* **en mesure** *si $\forall \epsilon > 0$, $\forall \epsilon' > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$, $\mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon'\} < \epsilon$.*

Proposition 5.2.2 *Avec les notations précédentes :*

1. *la convergence en moyenne au sens de $\mathbf{L}^1$ entraîne la convergence en mesure,*
2. *la convergence μ-presque partout entraîne la convergence en mesure si $\mu(X) < +\infty$,*
3. *la convergence μ-presque partout n'entraîne pas en général ni la convergence en mesure ni la convergence en moyenne au sens de $\mathbf{L}^1$,*

4. *la convergence μ-presque partout entraîne la convergence en moyenne au sens de $\mathbf{L}^1$ si $|f_n| \leq g$ $\forall n$ et $g \in \mathbf{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$,*
5. *la convergence en moyenne au sens de $\mathbf{L}^1$ n'entraîne pas en général la convergence μ-presque partout,*
6. *la convergence en mesure n'entraîne pas en général la convergence en moyenne au sens de $\mathbf{L}^1$,*
7. *la convergence en mesure à une extraction près entraîne la convergence μ-presque partout.*

Cette proposition est illustrée par le triangle des convergences donné par la figure 5.1.

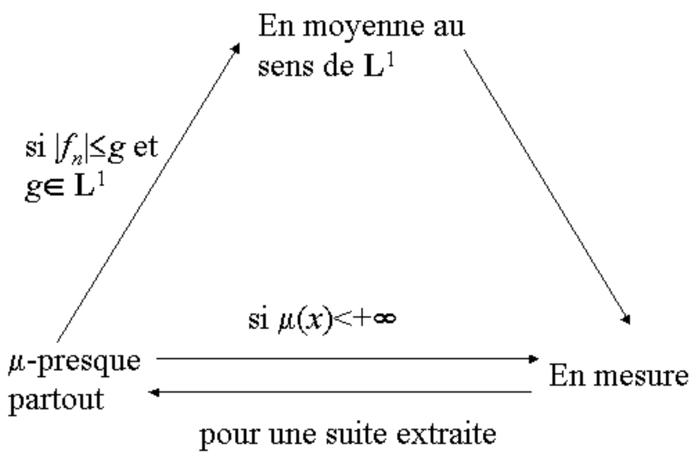

FIG. 5.1 – Le triangle d'or des convergences.

Preuve

1. En effet, soit $I = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon'\}$, nous avons :

$$\int_I |f_n - f| d\mu \leq \int_I \epsilon' d\mu \leq \epsilon' \mu \left(\{x \in X : |f_n - f| \leq \epsilon'\}\right), \tag{5.23}$$

donc $\mu\left(I\right) \leq \dfrac{1}{\epsilon'} \|f_n - f\|_1$. Cette inégalité est l'inégalité de Bienaymé et Tchebychev, qui dans sa version statistique n'est autre que la loi faible des grands nombres.

2. Par hypothèse l'ensemble $\{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$ est de mesure nulle. Soit $G_k = \{x \in X : \sup\limits_{n \geq k} |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ pour ϵ fixé. Ainsi $G_1 \subset ... \subset G_k \subset ... \subset X$ et si $\mu(X) < +\infty$ alors $\mu(\cap_{k\geq 1} G_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mu(G_k)$. Or dans $E = \cap_{k\geq 1} G_k = \{x \in X : \forall k, \exists n \geq k |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$, f_n ne converge pas vers f donc E est de mesure nulle. Ainsi $\mu(G_k)$ tend vers 0 avec k, et donc la suite (f_n) converge vers f en mesure.

En probabilité la convergence μ-presque partout entraîne toujours la convergence en mesure, puisque $P(X) = 1$.

3. Donnons un contre-exemple : soit $f_n = 1\!\!1_{[-n,n]}$ qui a pour limite $1\!\!1_{\mathbb{R}}$. Nous avons :

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon'\}\right) = \mu\left([-\infty, -n] \cup [n, +\infty]\right) = +\infty, \tag{5.24}$$

et aussi

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[-\infty,-n]} + 1\!\!1_{[n,+\infty]} d\mu = +\infty. \tag{5.25}$$

4. Ce résultat n'est autre que le théorème de convergence dominée.

5. Donnons un contre-exemple : soit $I_n = \{\theta \in [0, 2\pi] : \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{i} \leq \theta \leq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\pi}{i}\}$ et $f_n(\theta) = 1$ si $\theta \in I_n$ et 0 sinon. Ainsi :

$$\int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta = \text{longueur de}\, I_n = \frac{\pi}{n+1}, \tag{5.26}$$

qui tend vers 0. Donc f_n converge en moyenne au sens de $\mathbf{L}^1$, mais pas presque partout car pour tout x il existe une infinité de n pour lesquels $x \in I_n$, (*i.e.* $f_n(x) = 1$).

6. Donnons un contre-exemple : soit $f_n(x) = n$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ et 0 sinon. Ainsi f_n tend vers 0, mais $\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0| d\mu = 1$ alors que $\mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon'\}\right) = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0.

7. Par hypothèse : $\forall \epsilon > 0, \forall \epsilon' > 0, \exists N, \forall n > N, \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon'\}\right) \leq \epsilon$. Prenons $\epsilon = \epsilon' = \frac{1}{2^k}$, alors il existe N_k tel que $\forall n > N_k$, $\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}$. Soit $A_k = \{x \in X : \exists n_k, \forall n > n_k |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}$, alors $\mu(A_k) \leq \frac{1}{2^k}$. Nous allons utiliser un résultat très utile en probabilité dû à Borel et Cantelli :

Lemme 5.2.3 *Soit (A_k) une famille de sous-ensembles mesurables telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) < +\infty$, alors $\forall x \in X$, x appartient au plus à un nombre fini de A_k.*

Preuve du lemme

Soit la fonction $g = \sum_{k=0}^{+\infty} 1\!\!1_{A_k}$, alors d'après le corollaire 4.1.8, nous avons :

$$\int_X g(x) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_X 1\!\!1_{A_k}(x) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) < +\infty. \tag{5.27}$$

Ainsi g est fini μ-presque partout et donc x ne peut appartenir qu'à un nombre fini de A_k. $\square$

Par ce lemme, puisque $\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) < +\infty$, $\forall x \in X$, x appartient au plus à un nombre fini de A_k. Ainsi il existe $k_0(x)$ tel que $\forall k > k_0(x)$, $x \notin A_k$. Donc il existe $k_0(x)$ tel que $\forall k > k_0(x)$, $\forall n_k$, $\exists n > n_k$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$. Il est alors possible de construire une suite croissante d'entiers $n_j(x)$ telle que :

$$|f_{n_j(x)}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^{k_j}}, \tag{5.28}$$

ce qui prouve la convergence presque partout d'une suite extraite.

$\square$

Chapitre 6

Intégrales multiples

Nous avons défini l'intégrale simple dans les chapitres précédents, dans ce chapitre nous nous attachons à définir l'intégrale multiple. Pour ce faire, nous rappelons quelques notions sur les espaces produits et présentons les mesures produits. Le résultat fondamental du chapitre est le théorème de Fubini qui permet de définir l'intégrale multiple. Simple d'utilisation, il reste compliqué à démontrer.

6.1 Produit d'espaces mesurables

Considérons deux espaces mesurés $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ avec μ et ν deux mesures positives. Nous cherchons à munir l'espace $X \times Y$ d'une tribu et d'une mesure, où $X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\, y \in Y\}$.

Définition 6.1.1 *Soit $E \subset X \times Y$ et $x \in X$, la x-**section** de E, notée $(E)_x$ est définie par :*

$$(E)_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}. \tag{6.1}$$

*De même, pour $y \in Y$, la y-**section** de E, notée $(E)_y$ est définie par :*

$$(E)_y = \{x \in X : (x, y) \in E\}. \tag{6.2}$$

Remarque

- $(E)_x \subset Y$ et $(E)_y \subset X$.
- $(E^c)_x = (E)_x^c$, $(\cap_i E_i)_x = \cap_i (E_i)_x$ et $(\cup_i E_i)_x = \cup_i (E_i)_x$.

Définition 6.1.2 *L'**espace produit** de deux espaces mesurables $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ est l'espace mesurable $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, où $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est la tribu engendrée par la classe des* **pavés mesurables** *$\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.*

Proposition 6.1.3 *Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, alors $(E)_x \in \mathcal{N}$, $\forall x \in X$ et $(E)_y \in \mathcal{M}$, $\forall y \in Y$. Les sections d'un ensemble mesurable sont donc mesurables.*

Preuve E est donc un pavé mesurable. Soit $\Theta = \{E \subset X \times Y : (E)_x \in \mathcal{N}, \forall x \in X\}$. Il faut donc montrer que c'est une tribu. Si $E \subset \Theta$, l'ensemble $((X \times Y) \setminus E)_x = Y \setminus (E)_x$ appartient à $\mathcal{N}$, ainsi $((X \times Y) \setminus E)_x$ appartient à Θ. De même pour une suite (E_n) de Θ, nous avons $(\cap_n E_n)_x = \cap_n (E_n)_x$, donc l'intersection de la famille (E_n) appartient à Θ.

Le même raisonnement prouve que $(E)_y \in \mathcal{M}$, $\forall y \in Y$. □

Proposition 6.1.4 *Soit $f : X \times Y \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$, une fonction $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mesurable, alors*
- *$f_x : y \to f(x, y)$ est $\mathcal{N}$ mesurable, $\forall x \in X$,*
- *$f_y : x \to f(x, y)$ est $\mathcal{M}$ mesurable, $\forall y \in Y$.*

Preuve Si $f = \mathbb{1}_E$ (où $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$), d'après la proposition 6.1.3, le résultat est vrai. Il est donc vrai pour toute fonction en escalier, par passage à la limite (convergence simple) pour toute fonction f, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ mesurable. □

Proposition 6.1.5 *Soit $f : (Z, \mathcal{Q}) \longmapsto (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ avec $f = (f_1, f_2)$, alors f est mesurable si et seulement si f_1 et f_2 sont mesurables.*

Preuve Si f est mesurable, alors pour tout E de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{Q}$. Pour $E = A \times Y$ (où $A \in \mathcal{M}$), $f^{-1}(E) = f_1^{-1}(A) \in \mathcal{Q}$, donc f_1 est mesurable.

Si f_1 et f_2 sont mesurables, alors pour tout $E = A \times B \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, $f^{-1}(E) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{Q}$ puisque f_1 et f_2 sont mesurables. Ainsi $f^{-1}(A \times B) \subset \mathcal{Q}$. Donc $f^{-1}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) = f^{-1}(\sigma(A \times B)) = \sigma(f^{-1}(A \times B)) \subset \sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$, *i.e.* f est mesurable. □

6.2 Mesure produit

Définition 6.2.1 *Soit deux espaces mesurés $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, la* **mesure produit**, *produit des deux mesures μ et ν, notée $\mu \otimes \nu$, sur l'espace $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ est donnée pour tout $A \times B$ de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ par :*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B). \tag{6.3}$$

Théorème 6.2.2 *Si μ et ν sont deux mesures σ-finies, il existe une unique mesure positive $\mu \otimes \nu$ sur $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ telle que $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ pour tout pavé mesurable $A \times B$.*

Preuve Nous ne démontrons pas ici ce théorème, la démonstration est donnée par exemple dans [Gra88] ou [Mal82]. □

Ainsi, d'après l'unicité et la symétrie des données, pour tout E de $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, nous avons :

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu((E)_x) d\mu(x) = \int_Y \nu((E)_y) d\nu(y). \tag{6.4}$$

Théorème 6.2.3 Théorème de Fubini

Soit $f : X \times Y \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors pour presque tout y de Y, la fonction f_y est μ-intégrable sur X, la fonction $y \longmapsto \int_X f d(\mu\otimes\nu)$, définie presque partout dans Y est ν-intégrable et nous avons :

$$\int_Y \left(\int_X f_y(x) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu). \tag{6.5}$$

Preuve Considérons dans un premier temps $f = \mathbb{1}_E$, avec $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Nous avons donc

$$\int_X f_y(x) d\mu(x) = \int_X \mathbb{1}_{(E)_y}(x) d\mu(x) = \mu((E)_y). \tag{6.6}$$

D'après la proposition 6.1.4, la fonction qui à tout y associe $\mu((E)_y)$ est mesurable et son intégrale est par définition : $\mu \otimes \nu(E) = \int_{X\times Y} \mathbb{1}_E d\mu \otimes \nu$, ce qui montre le théorème pour les fonctions indicatrices. Par linéarité, le théorème est donc vrai pour toute fonction en escalier positive. De plus toute fonction mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonctions positives en escalier (*cf.* lemme 4.1.6). D'après le théorème de convergence monotone, le théorème est vérifié pour les fonctions mesurables positives. Nous pouvons écrire f comme soustraction de f^+ et f^- qui vérifient donc le théorème comme fonctions mesurables positives. Ainsi les fonctions $y \longmapsto \int_X f_y^+ d\mu$ et $y \longmapsto \int_X f_y^- d\mu$ sont intégrables, donc finies presque partout. Par soustraction de quantités finies, la fonction $y \longmapsto \int_X f_y d\mu$ est intégrable et

$$\begin{aligned} \textstyle\int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) &= \textstyle\int_{X\times Y} (f^+ - f^-)(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y) \\ &= \textstyle\int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y). \end{aligned} \tag{6.7}$$

□

Remarques

1. Lorsque les conditions du théorème sont satisfaites, l'intégrale est parfois notée :
$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int\int f(x,y)d\mu(x)d\nu(y). \tag{6.8}$$
2. Si f est une fonction $(\mu\otimes\nu)$-intégrable de $X\times Y$ dans $\mathbb{R}$, nous avons :
$$\int_Y\left(\int_X f_y(x)d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_X\left(\int_Y f_x(y)d\nu(y)\right)d\mu(x). \tag{6.9}$$
Il faut cependant prendre garde si f n'est pas $(\mu\otimes\nu)$-intégrable, car les deux membres de l'égalité (6.9) peuvent avoir un sens, sans être égaux. L'égalité peut également être vérifiée sans que f soit $(\mu\otimes\nu)$-intégrable. Cependant l'égalité (6.9) est toujours vraie si f est une fonction mesurable positive à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ et vaut $\displaystyle\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y)$. Ainsi en pratique, nous cherchons souvent à montrer que l'égalité est vraie pour $|f|$, pour prouver que f est $(\mu\otimes\nu)$-intégrable.

Ce résultat se généralise facilement au produit de n espaces mesurés par l'associativité du produit des tribus et des mesures.

Exemple 6.2.4

1. **Boréliens de $\mathbb{R}^n$**
La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, est définie par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par la classe des ouverts de $\mathbb{R}^n$, par les pavés de $\mathbb{R}^n$, $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^n(a_i,b_i)\right)$, ou encore par la classe des ensembles $\displaystyle\prod_{i=1}^n]-\infty,x_i[$.
2. **Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$**
Soit $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, est notée dx ou $dx_1\,dx_2\,...\,dx_n$, par $dx = dx_1\otimes dx_2\otimes ...\otimes dx_n$, où dx_i est la mesure de Lebesgue sur le $i^{\text{ème}}$ facteur du produit de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de Fubini permet de calculer la mesure de Lebesgue de tout borélien de $\mathbb{R}^n$. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ prolonge aux boréliens la fonction "volume" définie sur les pavés de $\mathbb{R}^n$.

6.3 Changement de variables

Considérons la fonction $\varphi : V \longmapsto \mathbb{R}^n$, $\varphi(x)=y$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et supposons que sa dérivée $\varphi'(x)$ existe pour tout x de V, alors $\varphi'(x)$ est l'application linéaire de matrice jacobienne :
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

Proposition 6.3.1 Formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^n$
Soit φ une bijection de $(A, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$ sur $(B, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dy)$, avec A et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et dx et dy les mesures de Lebesgue des espaces $(A, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ et $(B, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ telle que $\det \varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, alors

$$f \in \mathbf{L}^1(B, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dy) \Leftrightarrow f(\varphi(x)) \det \varphi'(x) \in \mathbf{L}^1(A, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx) \tag{6.11}$$

et

$$\int_B f(y)dy = \int_A f(\varphi(x))|\det \varphi'(x)|dx. \tag{6.12}$$

Cette proposition est une extension naturelle du changement de variables pour l'intégrale de Riemann. Elle reste simple d'utilisation. Une justification complète de cette proposition est donnée par exemple dans [Gra88].

Chapitre 7

Propriétés et application de l'intégrale

Nous avons déjà établi différentes propriétés de l'intégrale dans les chapitres précédents. Ainsi, la proposition 4.2.3 montre que l'intégrale est une fonctionnelle de $\mathbf{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, linéaire positive.

Nous présentons ici tout d'abord les conditions de continuité et dérivabilité de l'intégrale, puis nous présentons son utilisation dans différents contextes utiles au physicien. En particulier, nous donnons quelques résultats sur la transformation de Fourier et de Laplace, et présentons brièvement la théorie des distributions. Ces applications forment des ouvrages entiers (par exemple [BGC94b]) qui peuvent être consultés pour plus de détails.

7.1 Continuité et dérivabilité des intégrales

Proposition 7.1.1 *Soit μ une mesure positive sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. Soit f une application $f : X \times I \longmapsto \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$. Nous posons :*

$$F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x). \tag{7.1}$$

Si les conditions suivantes sont réunies :

1. *la fonction $f_t : X \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f_t(x) = f(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in I$,*
2. *la fonction $f_x : I \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = f(x,t)$ est continue pour μ-presque tout x,*
3. *il existe une fonction $g \in \mathbf{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle que pour tout $t \in I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$, pour μ-presque tout x,*

alors F est continue sur I.

Remarque L'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ est couramment $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Cette proposition se généralise facilement aux fonctions $f : X \times I \longmapsto \mathbb{C}$.

Preuve F est continue au point t_0 si et seulement si, pour toute suite t_n qui tend vers t_0, $F(t_n)$ tend vers $F(t_0)$. Or les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont réunies, à savoir :

1. la fonction $f_n(x) = f(x, t_n)$ est mesurable d'après l'hypothèse 1,
2. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x, t_0)$ pour μ-presque tout x et $\forall t_0$, car d'après l'hypothèse 2, $f_x(t)$ est continue,
3. $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour μ-presque tout x, uniformément en n, d'après l'hypothèse 3.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f(x, t_n) d\mu(x) = \int_X \lim_{n\to+\infty} f(x, t_n) d\mu(x), \tag{7.2}$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \int_X f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0), \tag{7.3}$$

ce qui montre la continuité. □

Proposition 7.1.2 *Soit μ une mesure positive sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. Soit f une application $f : X \times I \longmapsto \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$. Nous posons :*

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x). \tag{7.4}$$

Si les conditions suivantes sont réunies :

1. *la fonction $f_t : X \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f_t(x) = f(x, t)$ est mesurable pour tout $t \in I$,*
2. *la fonction $f_x : I \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = f(x, t)$ est dérivable pour μ-presque tout x,*
3. *il existe une fonction $g \in \mathbf{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle que pour tout $t \in I$, $\left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x)$, pour μ-presque tout x,*

alors F est dérivable sur I et

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} d\mu(x). \tag{7.5}$$

Preuve Par définition de la dérivée en t, en choisissant une suite h_n qui tend vers 0 :

$$\frac{F(t + h_n) - F(t)}{h_n} = \int_X \frac{f(x, t + h_n) - f(x, t)}{h_n} d\mu(x). \tag{7.6}$$

D'après le théorème de convergence dominée en utilisant le théorème des accroissements finis :

$$\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n} \leq \sup_{u\in[t,t+h_n]} \left|\frac{\partial f(x,u)}{\partial t}\right| \leq g(x), \tag{7.7}$$

ainsi

$$F'(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F(t+h_n)-F(t)}{h_n} = \int_X \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} d\mu(x). \tag{7.8}$$

□

7.2 Transformation de Fourier

La transformation de Fourier généralise le concept de série de Fourier aux fonctions non-périodiques. Les intégrales de Fourier interviennent par exemple dans des problèmes dans lesquels les conditions aux limites n'imposent pas la périodicité (par exemple dans l'équation de la chaleur). Le traitement du signal repose en grande partie sur une bonne compréhension de la transformée de Fourier. La plupart des résultats sur les séries de Fourier, étudiées en classes préparatoires, reposent uniquement sur l'intégrale de Riemann. Nous rappelons ici quelques propriétés en considérant l'espace des fonctions de carré intégrable $\mathbf{L}^2([0,2\pi],\mathcal{B}([0,2\pi]),\lambda)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, où λ est la mesure de Lebesgue.

7.2.1 Séries de Fourier

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{L}^2([0,2\pi],\mathcal{B}([0,2\pi]),\lambda)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ *i.e.* les fonctions $f : [0,2\pi] \longmapsto \mathbb{C}$ mesurables et telles que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ soit finie. En modifiant si nécessaire f telle que $f(0) = f(2\pi)$, nous pouvons prolonger f par $\tilde{f}(x + 2k\pi) = f(x)$, pour $x \in [0,2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, qui est une fonction 2π-périodique mesurable. Nous modifions le produit scalaire de E, pour tout f et $g \in E$, par :

$$< f,g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx, \tag{7.9}$$

ainsi

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \tag{7.10}$$

Soit $e_n : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, les fonctions définies pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $e_n(x) = e^{inx}$. Il est aisé de montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace de fonctions de $\mathbf{L}^2([0,2\pi])$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 7.2.1 *Soit $f \in \mathbf{L}^1([0,2\pi])$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, les coefficients de Fourier de f sont définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \tag{7.11}$$

et sa série de Fourier est donnée par :

$$S(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n. \tag{7.12}$$

Proposition 7.2.2 *La série de Fourier d'une fonction $f \in \mathbf{L}^2([0,2\pi])$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est convergente dans l'espace des fonctions de $\mathbf{L}^2([0,2\pi])$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et sa somme est f. De plus :*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2. \tag{7.13}$$

Preuve Nous laissons la preuve en exercice. □

Dans le cas de fonctions réelles l'égalité (7.13) s'écrit :

$$\|f\|_2^2 = a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2), \tag{7.14}$$

où $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

7.2.2 Transformée de Fourier

Définition 7.2.3 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ ($f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), sa* **transformée de Fourier**, *notée $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$ est donnée par :*

$$\mathcal{F}f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xt} dx. \tag{7.15}$$

Soit e_t la fonction définie par $e_t(x) = e^{2i\pi xt}$, et $< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx$, alors

$$\mathcal{F}f(t) =< f, e_t > . \tag{7.16}$$

Définition 7.2.4 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ ($f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), sa* **transformée de Fourier inverse**, *notée $\overline{\mathcal{F}}f$ est donnée par :*

$$\overline{\mathcal{F}}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2i\pi xt} dx =< f, e_x > . \tag{7.17}$$

Proposition 7.2.5 *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Les transformations de Fourier $\mathcal{F}$ et de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$ sont linéaires.*
2. *Soit k un réel non nul alors $\mathcal{F}f(kt) = \dfrac{1}{|k|}\mathcal{F}f(\dfrac{t}{k})$.*
3. *Pour tout a réel, la* **translatée** *$\tau_a f$ de f est définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$, et nous avons $\mathcal{F}(\tau_a f) = \overline{e_a}\mathcal{F}f$ et inversement $\mathcal{F}(e_a f) = \overline{\tau_a}\mathcal{F}f$.*

Preuve La démonstration facile est laissée en exercice. □

Théorème 7.2.6 Théorème de Riemann-Lebesgue

La transformée de Fourier d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ existe, est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini. De plus la norme uniforme de $\mathcal{F}f$ vérifie :

$$\|\mathcal{F}f\|_{+\infty} \leq \|f\|_1. \tag{7.18}$$

Preuve En effet, $\mathcal{F}f$ existe car $f(x)e^{-2i\pi xt} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-2i\pi xt}|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < +\infty$. Nous montrons la continuité par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. En effet les hypothèses du théorème sont vérifiées :

1. la fonction $x \longmapsto f(x)e^{-2i\pi xt}$ est mesurable comme le produit d'une fonction mesurable et d'une fonction continue,
2. pour presque tout x, la fonction $t \longmapsto f(x)e^{-2i\pi xt}$ est continue,
3. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|f(x)e^{-2i\pi xt}\right| \leq |f(x)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

L'inégalité sur les normes est donnée par :

$$|\mathcal{F}f(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx, \tag{7.19}$$

pour tout t.

Reste à montrer que $\mathcal{F}f(t_n)$ tend vers 0 si t_n tend vers l'infini. Si $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]} e^{-2\pi itx}dx = \int_a^b e^{-2\pi itx}dx = \frac{-1}{2\pi it}\left(e^{-2\pi itb} - e^{-2\pi ita}\right), \tag{7.20}$$

ainsi dans ce cas, $\mathcal{F}f(t) = O(\frac{1}{|t|})$. Par linéarité, la propriété est vraie pour les fonctions en escalier, et donc pour toute fonction intégrable, qui peut s'écrire comme limite de fonctions en escalier. □

Proposition 7.2.7 *Soit f une fonction continûment dérivable, telle que f et f' soient intégrables, alors :*

$$\mathcal{F}f'(t) = 2\pi it\mathcal{F}f(t). \tag{7.21}$$

Preuve Puisque f' est intégrable, la fonction f admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$, car dans ce cas $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$. Et comme f est intégrable, ces limites sont nulles. Ainsi, par intégration par parties :

$$\int_{-n}^{n} f'(x)e^{-2\pi itx}dx = \left[f(x)e^{-2\pi itx}\right]_{-n}^{n} - 2\pi it\int_{-n}^{n} f(x)e^{-2\pi itx}dx. \tag{7.22}$$

Lorsque n tend vers l'infini, nous obtenons l'égalité (7.21). □

Remarque

1. La proposition reste vraie, si f et f' sont dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
2. De la même façon nous pouvons montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et si $f, ..., f^{(k)}$ sont intégrables alors :

$$\mathcal{F}(f)^{(k)}(t) = (2\pi it)^k \mathcal{F}f(t). \tag{7.23}$$

Proposition 7.2.8 *Soit f et xf des fonctions intégrables, alors $\mathcal{F}f$ est continûment dérivable et*

$$(\mathcal{F}f)'(t) = -2\pi it\mathcal{F}(xf)(t). \tag{7.24}$$

Remarque De même, nous pouvons montrer que si $f, ..., x^k f$ sont intégrables, alors $\mathcal{F}f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$(\mathcal{F}f)^{(k)}(t) = (-2\pi it)^k \mathcal{F}(x^k f)(t). \tag{7.25}$$

Preuve Le théorème de Riemann-Lebesgue assure la continuité de $\mathcal{F}f$. La dérivabilité s'obtient à partir du théorème de convergence dominée de Lebesgue en majorant $\dfrac{\mathcal{F}f(t+h) - \mathcal{F}f(t)}{h}$ à l'aide de l'inégalité $|e^{-2\pi ihx} - 1| \leq 2\pi|hx|$ déduite des accroissements finis. □

7.2.3 Convolution

Soit f et g deux fonctions intégrables, alors par le théorème de Fubini, nous pouvons écrire le produit de $\mathcal{F}f(t)$ et de $\mathcal{F}g(t)$ sous la forme d'une intégrale double :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2\pi itu}g(y)e^{-2\pi ity}dudy, \tag{7.26}$$

par le changement de variable $x = u + y$, elle devient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)e^{-2\pi itx}dxdy. \tag{7.27}$$

Toujours à l'aide du théorème de Fubini, nous pouvons intégrer par rapport à y, pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi itx}(f*g)(x)dx, \tag{7.28}$$

où

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy. \tag{7.29}$$

En effet, les conditions d'application du théorème sont remplies puisque :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(y)|dxdy \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy < +\infty. \tag{7.30}$$

De plus $(f*g)$ est définie presque partout et est intégrable.

Définition 7.2.9 *Soit deux fonctions f et g intégrables, le* **produit de convolution** *de f et g, noté $f*g$ est définie par la fonction intégrable :*

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy. \tag{7.31}$$

Proposition 7.2.10 *Le produit de convolution vérifie les propriétés suivantes :*

1. *il est commutatif,*
2. $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$,
3. *pour tout réel a, $\tau_a(f*g) = f*\tau_a g = \tau_a f*g$.*

Preuve

1. Puisque par définition :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy, \tag{7.32}$$

par le changement de variable $u = y - x$, nous obtenons :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u-x)du = (g*f)(x). \tag{7.33}$$

2. Nous avons déjà que $f * g$ est intégrable, de plus :

$$\|(f * g)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f * g|(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy \right| dx, \tag{7.34}$$

   et

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|\,|g(y)|dxdy = \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{7.35}$$

3. $\tau_a(f * g) = (f * g)(x-a) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y-x+a)g(y)dy$, par changement de variable $u = y + a$, nous obtenons :

$$\tau_a(f * g) = \int_{\mathbb{R}} f(u-x)g(u-a)du = (f * \tau_a g), \tag{7.36}$$

   et par commutativité du produit de convolution nous obtenons le résultat.

□

De part les considérations précédentes, nous avons montré le théorème suivant.

Théorème 7.2.11 *Si f et g sont intégrables, nous avons $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.*

7.2.4 Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

Définition 7.2.12 *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ est constitué des fonctions f sur $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables et telles que pour tout entier n et p la fonction $x^p f^{(n)}$ soit bornée, ce qui s'écrit :*

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} : f \in \mathcal{C}^\infty \text{ et } \forall n, \forall p, \max_{x \in \mathbb{R}} |x|^n \left| \frac{d^p f}{dx^p} \right| < +\infty \right\}. \tag{7.37}$$

Remarque L'espace $\mathcal{S}$ n'est pas vide, car la fonction $f : x \longmapsto e^{-\pi x^2}$ est dans $\mathcal{S}$.

Proposition 7.2.13 *Voici quelques propriétés de l'espace $\mathcal{S}$:*

1. *$\mathcal{S}$ est stable par dérivation,*
2. *$\mathcal{S}$ est stable par multiplication par x,*
3. *$\mathcal{S}$ est invariant par transformation de Fourier, nous avons même $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.*

Preuve

1. La première propriété est évidente de par la définition de $\mathcal{S}$, puisque si $f \in \mathcal{S}$ alors elle est indéfiniment dérivable, donc sa dérivée est dans $\mathcal{S}$.
2. Pour montrer la deuxième propriété, il suffit de remarquer que $(xf)^{(n)} = xf^{(n-1)} + f^{(n)}$, ainsi xf est dans $\mathcal{S}$.
3. $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ est évident d'après les résultats de dérivation précédents. Si $f \in \mathcal{S}$, alors $(x^n f)^{(p)}$ l'est aussi et $\mathcal{F}\left((x^n f)^{(p)}\right) = x^p (\mathcal{F}f)^{(n)}$, or le premier membre est borné puisque toute fonction de $\mathcal{S}$ est intégrable.

□

Théorème 7.2.14 *L'application $f \longmapsto \mathcal{F}f$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$, de plus :*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(t) e^{2i\pi xt} dt. \tag{7.38}$$

Remarque Si $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$, l'intégrale a un sens et de plus :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(t)|^2 dt, \tag{7.39}$$

i.e. $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$. Nous retiendrons que la transformée de Fourier est une isométrie au sens de $\mathbf{L}^2$.

Preuve La preuve due à Guelfand est longue, elle est donnée pas à pas dans [Fer84]. □

7.3 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est particulièrement employée pour caractériser les lois de probabilité.

Définition 7.3.1 *Soit f une fonction localement intégrable (*i.e. *sur tout intervalle borné) sur $\mathbb{R}$ ($f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), sa* **transformée de Laplace bilatérale**, *notée $\mathcal{L}f$ est donnée par :*

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-zt} dt, \tag{7.40}$$

chaque fois que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-zt}$ est intégrable.

Remarque La transformation de Laplace est une transformation de Fourier pour laquelle la phase imaginaire pure est remplacée par une phase complexe quelconque, *i.e.* $2\pi ix$ est remplacé par z. Ainsi $\mathcal{L}f$ peut s'interpréter comme une famille de transformées de Fourier. En effet, pour x fixé :

$$\mathcal{L}f(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-xt}e^{-iyt}dt, \tag{7.41}$$

ainsi, la fonction $y \longmapsto \mathcal{L}f(x+iy)$ s'obtient par transformation de Fourier de la fonction $f_x : t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ et :

$$\mathcal{L}f(x+iy) = \mathcal{L}f_x\left(\frac{y}{2\pi}\right). \tag{7.42}$$

Définition 7.3.2 *L'ensemble des points z tels que $\mathcal{L}f(z)$ soit définie est une bande de la forme $a < Re(z) < b$, avec a et b éventuellement infinis, et porte le nom de* **bande de convergence** *de la transformée de Laplace. f admet une transformée de Laplace si cette bande est non vide.*

Définition 7.3.3 *La* **transformée de Laplace unilatérale** *est définie pour les fonctions à support dans $[0,+\infty)$ (*i.e.* des fonctions définies sur $[0,+\infty)$ prolongées par 0 sur $(-\infty,0[$) par :*

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt. \tag{7.43}$$

Cette transformation est particulièrement importante et très étudiée en physique. Pour rendre une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à support dans $[0,+\infty)$, il suffit de la multiplier par la fonction d'Heaviside définie par 0 sur $(-\infty,0[$ et 1 sur $[0,+\infty)$, notée Y. Sa transformée de Laplace est $\mathcal{L}Y(z) = \dfrac{1}{z}$.

Proposition 7.3.4 *Voici quelques propriétés de la transformation de Laplace unilatérale.*

1. *L'espace des fonctions à support dans $[0,+\infty)$ qui admettent une transformée de Laplace est un espace vectoriel.*
2. **Propriété de changement d'échelle**
   Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$, et f une fonction à support dans $[0,+\infty)$ qui admet une transformée de Laplace sur la bande de convergence $]x_0,+\infty)$, alors la fonction f_e définie par $f_e(x) = f(ax)$ a pour transformée de Laplace sur la bande de convergence $]ax_0,+\infty)$: $\dfrac{1}{a}\mathcal{L}f(\dfrac{z}{a})$.
3. **Propriété de translation**
   Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$, et f une fonction à support dans $[0,+\infty)$ qui admet une transformée de Laplace sur la bande de convergence $]x_0,+\infty)$, alors la fonction $\tau_a f$ définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$ a pour transformée de Laplace sur la bande de convergence $]x_0,+\infty)$: $e^{-az}\mathcal{L}f(z)$.

4. **Dérivée**
Soit f une fonction à support dans $[0, +\infty)$ qui admet une transformée de Laplace sur la bande de convergence $]x_0, +\infty)$, si f est absolument continue sur $\mathbb{R}^+$ et si $e^{-zx}f(x)$ converge en l'infini pour $Re(z) > x_0$, alors f' admet une transformée de Laplace sur la bande de convergence $]x_0, +\infty)$ qui est donnée par $\mathcal{L}f'(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0^+)$.
5. **Produit de convolution**
Soit f et g deux fonctions à support dans $[0, +\infty)$ qui admettent une transformée de Laplace respectivement sur les bandes de convergence $]x_1, +\infty)$ et $]x_2, +\infty)$, alors le produit de convolution $f * g$ admet une transformée de Laplace sur la bande de convergence $]\sup(x_1, x_2), +\infty)$ telle que $\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}f(z)\mathcal{L}g(z)$.

Preuve Ces propriétés peuvent se déduire de celles de la transformée de Fourier. Nous donnons ici les démonstrations en guise d'exercices corrigés.

1. Cette propriété découle de la linéarité de l'intégrale de la transformée de Laplace.
2. Si $a \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathcal{L}f_e(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx}f(ax)dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{zu}{a}}f(u)du = \frac{1}{a}\mathcal{L}f(\frac{z}{a})$ défini pour $Re(\frac{z}{a}) > x_0$, donc pour $Re(z) > ax_0$.
3. Si $a \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathcal{L}\tau_a f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx}f(x-a)dx = \int_0^{+\infty} e^{-z(u+a)}f(u)du$, car f est à support dans $[0, +\infty)$. Ainsi $\mathcal{L}\tau_a f(z) = e^{-az}\mathcal{L}f(z)$.
4. Si f est absolument continue sur $\mathbb{R}^+$, elle admet une dérivée f', définie presque partout sur $\mathbb{R}^+$ et localement intégrable telle que pour tout $x \geq 0$:
$$f(x) = f(0^+) + \int_0^x f'(t)dt. \tag{7.44}$$
Ainsi, la fonction $x \longmapsto e^{-zx}f(x)$ est absolument continue sur $\mathbb{R}^+$, comme produit de fonctions absolument continues, et par intégration par partie, pour tout $x > 0$:
$$\int_0^x e^{-zt}f'(t)dt = e^{-zx}f(x) - f(0^+) + z\int_0^x e^{-zt}f(t)dt. \tag{7.45}$$
Pour $Re(z) > x_0$, le dernier terme admet $z\mathcal{L}f(z)$ comme limite en l'infini et puisque f est intégrable, la limite de $e^{-zx}f(x)$ est nulle. Ainsi, pour $Re(z) > x_0$:
$$\mathcal{L}f'(z) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-zt}f'(t)dt = z\mathcal{L}f(z) - f(0^+). \tag{7.46}$$
5. Soit $h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$, alors
$$\mathcal{L}h(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx}h(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z(x-t)}f(x-t)e^{-zt}g(t)dtdx, \tag{7.47}$$

par le théorème de Fubini et un changement de variable, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{L}h(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zu} f(u)du \int_{\mathbb{R}} e^{-zt} g(t)dt = \mathcal{L}f(z)\mathcal{L}g(z). \tag{7.48}$$

□

7.4 Distributions

Les physiciens sont souvent amenés à étudier des phénomènes ponctuels, ou qu'ils considèrent comme tels. Par exemple, si un signal f est émis pendant un temps très cours autour de t_0, c'est surtout le changement d'énergie qui est intéressant pour le dispositif de réception, et non le détail de f. Si $t_0 \in [t_1, t_2]$, nous nous intéressons à l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ ou encore à l'intégrale $< f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$, où $\varphi(t) = \mathbb{1}_{[t_1,t_2]}(t)$.

L'idée pour simplifier est de passer à la limite et considérer $f(t)$ nulle pour $t \neq t_0$. Cependant dans le cadre des fonctions ceci implique $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = 0$. Ce problème n'inquiéta pas les physiciens, qui manipulèrent ces "fonctions" sans justification pendant vingt ans, jusqu'à ce que Laurent Schwartz inventa la théorie des distributions. Ce problème nous pousse donc à considérer non plus des fonctions, mais ce qui est appelée **impulsion de fonction généralisée** ou **distribution**. Les distributions sont données non pas par leur valeur en des points, mais par leurs intégrales sur des fonctions-test φ. Il est en effet très difficile la plupart du temps de les expliciter.

Le choix des fonctions-test est en partie libre, cependant pour éviter des ambiguïtés aux points de discontinuité, les fonctions-tests seront choisies continues. De plus, il est intéressant que les fonctions-tests soient indéfiniment dérivables, ce qui a poussé à un nouvel espace de fonctions, noté $\mathcal{D}$.

7.4.1 Espace de Schwartz $\mathcal{D}$

L'espace vectoriel de Schwartz $\mathcal{D}$ est un espace inclus dans $\mathcal{S}$, qui est celui des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

Exemple 7.4.1 Schwartz a proposé un exemple d'une fonction de $\mathcal{D}$:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} \quad \text{si} \quad |x| < 1. \end{cases} \tag{7.49}$$

Son support $[-1, 1]$ est borné, et elle est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $|x| > 1$, puisqu'elle est nulle, et sur l'intervalle $|x| < 1$ comme exponentielle d'une fonction indéfiniment dérivable. Par récurrence, nous pouvons vérifier que toutes ses dérivées en $x = \pm 1$ sont nulles.

Ainsi, même si $\mathcal{D}$ contient peu d'éléments, il n'est pas vide. Nous avons de plus une propriété de convergence très forte issue de la définition même de $\mathcal{D}$.

Proposition 7.4.2 *Soit une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}$, elle converge lorsque n tend vers l'infini vers une fonction φ de $\mathcal{D}$ si*
- *les supports des fonctions φ_n sont contenus dans un même ensemble borné,*
- *lorsque n tend vers l'infini, φ_n converge uniformément vers φ et chaque dérivée de φ_n converge uniformément vers la dérivée correspondante de φ.*

7.4.2 Distributions de Schwartz

Définition 7.4.3 *Les distributions de Schwartz sont les fonctionnelles linéaires continues sur $\mathcal{D}$.*

Remarque En fait, même si l'existence de fonctionnelles non continues sur $\mathcal{D}$ a été démontrée par Schwartz, aucune n'a encore été explicitement donnée.

Définition 7.4.4 *Une distribution régulière T_f est définie pour toute fonction localement intégrable (au sens de Lebesgue) par*

$$< T_f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{7.50}$$

Par abus de langage, les fonctions localement intégrables sont appelées des distributions et il est alors noté

$$< f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \tag{7.51}$$

au lieu de l'égalité (7.50).

Définition 7.4.5 *Les distributions qui ne sont pas régulières, sont appelées distributions singulières .*

Exemple 7.4.6 Distribution de Dirac
La distribution de Dirac, notée δ est définie par

$$< \delta, \varphi >= \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \tag{7.52}$$

où plus généralement, la distribution de Dirac au point a, notée δ_a est définie par

$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{7.53}$$

La distribution de Dirac représente donc une impulsion en un point donné. En physique, une écriture incorrecte est souvent utilisée, δ et δ_a sont écrit $\delta(x)$ et $\delta(x-a)$, qui pourrait laisser penser que ce sont des fonctions. Une autre écriture incorrecte du physicien est la suivante :

$$\int \delta_a(x)\varphi(x)dx = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \tag{7.54}$$

pour conserver les notations des distributions singulières, ce qui laisse croire que $\delta_a(x)\varphi(x)$ est définie et intégrable, ce qui n'est bien sûr pas le cas.

Les distributions peuvent donc être vues comme une certaine généralisation des fonctions. La plupart des opérations sur les fonctions peuvent se généraliser aux distributions.

Définition 7.4.7 Opérations sur les distributions

1. **Combinaison linéaire**
Si λ_1 et λ_2 sont deux complexes et T_1 et T_2 deux distributions, alors la combinaison linéaire $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ est définie par

$$< \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \varphi >= \lambda_1 < T_1, \varphi > +\lambda_2 < T_2, \varphi >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{7.55}$$

2. **Dérivation**
La dérivée d'une distribution T est la distribution T' définie par

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{7.56}$$

3. **Translation**
Si f est une fonction localement intégrable, la fonction translatée $\tau_a f$ définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$, et nous avons par changement de variable

$$\int_{I\!R} f(x-a)\varphi(x)dx = \int_{I\!R} f(x)\varphi(x+a)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \tag{7.57}$$

i.e.

$$< \tau_a f, \varphi >=< f, \tau_{-a}\varphi > . \tag{7.58}$$

Ainsi, la translatée $\tau_a T$ de la distribution T quelconque est définie par

$$< \tau_a T, \varphi >=< T, \tau_{-a}\varphi >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{7.59}$$

Exercices

TD1 Intégrale de Riemann et ses limites

Rappel sur l'intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann est définie pour les fonctions bornées $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$, où $[a,b]$ est un intervalle fermé borné. Il existe trois façons de définir et construire l'intégrale de Riemann d'une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$:

1. par les sommes de Riemann,
2. par les sommes de Darboux,
3. par les fonctions en escalier.

L'intégrale s'obtient dans les trois cas équivalents comme limite et f est dite **intégrable au sens de Riemann** si cette limite existe.

Sommes de Riemann

Soit $\mathcal{P} = \{x_0 = a,\, x_1, ...,\, x_n = b\}$ une partition de $[a,b]$ et $\pi(\mathcal{P}) = \sup\limits_{i=\{0,...,n-1\}} (x_{i+1} - x_i)$ le pas de cette partition. Les sommes de Riemann sont données par

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i), \tag{1.1}$$

et

$$I(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i). \tag{1.2}$$

Définition 1.1 *f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si*

$$\lim_{\pi(\mathcal{P}) \to 0} S(\mathcal{P}, f) = \lim_{\pi(\mathcal{P}) \to 0} I(\mathcal{P}, f) \stackrel{\triangle}{=} \int_a^b f(t)dt, \tag{1.3}$$

ou encore si et seulement si f est bornée et $\inf\limits_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f) = \sup\limits_{\mathcal{P}} I(\mathcal{P}, f)$.

Sommes de Darboux

Si $\mathcal{P}$ est une partition de $[a,b]$, les sommes de Darboux sont données par

$$D(\mathcal{P},f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i),\quad t_i\in[x_i,x_{i+1}]. \tag{1.4}$$

Définition 1.2 *f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si f est bornée et $\lim_{\pi(\mathcal{P})\to 0} D(\mathcal{P},f)$ existe et vaut par définition $\int_a^b f(t)dt$.*

Fonctions en escalier

Une fonction g est dite **en escalier** si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs discrètes, si la partition $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ est associée, nous définissons

$$\int_a^b g(t)dt=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(x_{i+1}-x_i), \tag{1.5}$$

où α_i est la valeur constante de g sur $[x_i,x_{i+1}]$.

Définition 1.3 *f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si f est bornée et $\forall\epsilon>0$, $\exists u$, v en escalier telles que*

$$\int_a^b (v(t)-u(t))dt<\epsilon, \tag{1.6}$$

et $\forall t\in[a,b]$, $u(t)\leq f(t)\leq v(t)$. Nous avons alors

$$\int_a^b f(t)dt \triangleq \sup_{u\leq f,\, u\in E_s}\int_a^b u(t)dt=\inf_{v\geq f,\, v\in E_s}\int_a^b v(t), \tag{1.7}$$

où E_s est l'ensemble des fonctions en escalier.

Exercices

Exercice 1.1 Continuité

1. *Montrer que les fonctions bornées et continues sur $[a,b]$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$.*
   Nous avons en fait le résultat suivant :

   Proposition 1.4 *Soit em $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$, bornée, pour que f soit intégrable au sens de Riemann il faut et il suffit que f soit continue sur $[a,b]$ sauf sur un ensemble négligeable de points.*

2. *Montrer que la fonction définie sur $[a,b]$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & si \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1.8}$$

   n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exercice 1.2 intégrales impropres

1. *Étudier la convergence de*

   (a)

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln(\sin(\frac{1}{x}))dx. \tag{1.9}$$

   (b)

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln(\cos(\frac{1}{x}))dx. \tag{1.10}$$

2. *Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale*

$$\int_0^1 x^\alpha \ln x dx, \tag{1.11}$$

   converge ?

Exercice 1.3 absolument intégrable

Définition 1.5 *f est* **absolument intégrable** *si $|f|$ est intégrable.*

1. *Montrer le théorème suivant*

   Théorème 1.6 *Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$, bornée. Si f est intégrable alors f est absolument intégrable et*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{1.12}$$

2. *Montrer que la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & si \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1.13}$$

est absolument intégrable sur $[0, 1]$*, conclure.*

3. *Démontrer le théorème suivant*

Théorème 1.7 *Si* f *est une fonction absolument intégrable sur* $[a, +\infty)$*, alors* f *est intégrable sur* $[a, +\infty)$*, et*

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx. \tag{1.14}$$

4. *Soit* $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$*. Montrer que l'intégrale impropre de* f *sur* $[0, +\infty[$ *est* **semi-convergente** *(*i.e. *f est intégrable, mais n'est pas absolument intégrable).*

5. *En déduire un contre exemple de la réciproque du théorème 1.7.*

TD2 Espaces et fonctions mesurables

Exercice 2.1 Exemples de tribus

1. *Ecrire toutes les tribus possibles sur* $X = \{a, b, c\}$ *ensemble de trois éléments distincts.*
2. *Les ensembles suivants sont-ils dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *:* $\{1\}$, $[2, +\infty[$, $[2, 3[$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *?*

Exercice 2.2 Fonctions mesurables

Soit un ensemble $X \neq \emptyset$. *Déterminer les fonctions mesurables* f *de* (X, Θ) *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *dans les cas suivants :*

1. $\Theta = \mathcal{P}(X)$ *ensemble de toutes les parties de* X,
2. $\Theta = \{\emptyset, X\}$,
3. $\Theta = \{\emptyset, \{a\}, X \setminus \{a\}, X\}$, *pour* $a \in X$, *fixé,*
4. $\Theta = \{\emptyset, A, A^c, X\}$, *pour* $A \in \mathcal{P}(X)$, *fixé, avec* $A \neq \emptyset$.

Exercice 2.3 Une propriété de plus des fonctions mesurables

Soit f *et* g *deux fonctions mesurables de* (X_1, Θ_1) *dans* (X_2, Θ_2) *et de* (X_2, Θ_2) *dans* (X_3, Θ_3), *montrer que* $g \circ f$ *est mesurable.*

Exercice 2.4 Mesures positives

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré, et* μ *mesure positive.*

1. *Soit* (A_n) *une suite croissante pour l'inclusion d'ensembles mesurables (ou espaces mesurables), montrer que* $\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$.
2. *Soit* (A_n) *une suite décroissante pour l'inclusion d'ensembles mesurables, telle que* $\mu(A_1) < +\infty$, *montrer que* $\mu(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$.

Exercice 2.5 Probabilité

Soit μ *une probabilité sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *soit* F *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0, 1]$ *définie par* $F(x) = \mu(]-\infty, x])$, μ *mesure positive.*

1. *Montrer que* F *est croissante et admet en tout point une limite à droite et à gauche. Calculer* $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.
2. *Soit* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$, *montrer que :*
   - $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$
   - $\mu(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$
   - F *est continue en* a *si et seulement si* $\mu(\{a\}) = 0$.
3. *Soit* D *l'ensemble des points où* F *est discontinue et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \{t \in \mathbb{R};\ \mu(t) \geq \frac{1}{n}\}$. *Montrer que* $D = \cup_n D_n$, *en déduire que* D *est dénombrable.*

TD3 Intégration de fonctions mesurables

Exercice 3.1 Fonction borélienne

Considérons la fonction de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par :* $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *si* $(x,y) \neq 0$ *et* $f(0,0) = 0$. *Montrer que* f *est borélienne (*i.e. *mesurable de* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ *dans lui même).*

Exercice 3.2 Lemme d'existence

Montrer qu'une fonction mesurable f *à valeur dans* $\overline{\mathbb{R}}^+$ *est limite simple d'une suite croissante de fonctions en escalier données par :*

$$f_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]\right)} + n \mathbb{1}_{f^{-1}([n,+\infty])} \tag{3.1}$$

Exercice 3.3 Intégrabilité pour la mesure de Dirac

Soit $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$ *un espace mesuré, tel que* $a \in X$, *et* δ_a *est la mesure de Dirac,* i.e. *:*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & si \quad a \in A, \\ 0 & si \quad a \notin A. \end{cases} \tag{3.2}$$

Montrer que toute fonction f *de* X *dans* $\mathbb{R}$ *est intégrable et que* $\int_X f(x)\, d\delta_a(x) = f(a)$.

Exercice 3.4 Presque partout ?

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et* f *une fonction mesurable positive de* x *dans* $\overline{\mathbb{R}}^+$.

1. *Montrer l'équivalence :* $\int_X f(x)\, d\mu(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ*-presque partout (pour presque tout* x*).*
2. *Montrer l'implication :* $\int_X f(x)\, d\mu(x) < +\infty \Rightarrow f$ *est finie presque partout.*
3. *Que pensez-vous de la réciproque de l'implication précédente ?*

Exercice 3.5 Convergence dominée

Soit f *une fonction intégrable de* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ *dans* $\mathbb{R}$, *et* α *un réel strictement plus grand que 1. Montrer que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n x f(x)}{1 + n^\alpha x^\alpha}\, d\mu(x) = 0. \tag{3.3}$$

TD4 Application de la théorie de l'intégration

Exercice 4.1 Convergence

Soit $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ *définie sur* $[0, 1]$. *Etudier la convergence simple et uniforme et calculer :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n(1 - x^n)\,dx. \tag{4.1}$$

Exercice 4.2 Théorème de Fubini

Soit $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, *sans vérifier les conditions du théorème calculer de deux façons différentes* $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dy\right) dx$, i.e. *calculer :*

$$A = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy\right) dx, \tag{4.2}$$

et

$$B = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx\right) dy. \tag{4.3}$$

Que conclure du résultat ?

Exercice 4.3 Dérivation sous la signe somme

Soit f, *une fonction réelle, telle que* $|f(t)|e^{-at}$ *soit* $\mathbf{L}^1([0, +\infty[)$ *pour* $a \in \mathbb{R}^+$.

1. *Montrer que* $\varphi(x, t) = e^{-xt}f(t)$ *est intégrable au sens de Lebesgue sur* $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$,
2. *Soit* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x, t)\,dt$, *montrer que* $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-xt}f(t)\,dt$.

Exercice 4.4 Transformée de Laplace

Calculer les transformées de Laplace unilatérales pour :

1. *la fonction d'Heaviside définie par*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0, \\ 1 & si \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

2. $f(t) = t^n$, *avec* $n \in \mathbb{N}$.
3. $f(t) = \sin(\omega t)$.

Glossaire

Indications historiques

- Bienaymé (Irénée-Jules) 1796-1878 : mathématicien français, il fut professeur de probabilité à la Sorbonne. Il a publié les travaux de Tchebichev en français, son ami, avec lequel il publia une démonstration simple de la loi forte des grands nombres à partir de l'inégalité qui porte leurs noms.
- Borel (Émile) 1871-1956 : mathématicien français, il fut élève à l'école normale supérieure. Il est à l'origine de la théorie de la mesure, ainsi un espace et une mesure porte son nom. Cette théorie est le fondement de la théorie de l'intégration de Lebesgue. Il marque le début de la théorie des fonctions à variables réelles, et il est l'un des premiers à avoir développé une théorie systématique des séries divergentes. Il s'intéressa également à la théorie des jeux, ses principaux écrits sont "Le Hasard" (1913), "L'espace et le temps" (1921), et "Traité du calcul de probabilité et ses applications" (1924-34).
- Cauchy (Augustin-Louis) 1789-1857 : mathématicien français, il s'intéressa avec rigueur à la convergence des suites dans un espace métrique complet, aux séries, et il est à l'origine de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Dans son cours à l'école Polytechnique (1823) il démêla rigoureusement la question de l'intégralité des fonctions, question à laquelle les mathématiciens s'intéressaient depuis longtemps (Archimède, Barrow, Newton, ...).
- Cantelli (Francesco Paolo) 1875-1966 : mathématicien italien, il publia une thèse sur la mécanique céleste. Il s'intéressa aussi à la probabilité appliquée à l'économie et aux distributions.
- Darboux (Gaston) 1842-1917 : mathématicien français, il publia ses premiers travaux alors qu'il était étudiant à l'école normale supérieur. Ses principales contributions furent en analyse et géométrie différentielle. En 1875 il ouvra la voie à l'intégrale de Riemman, en définissant les sommes supérieure et inférieure, et en définissant une fonction intégrable si la différence entre les sommes supérieure et inférieure de la fonction tend vers 0.
- Dirac (Paul-Adrien-Maurice) 1902-1984 : physicien anglais, il émigra aux états-unis. Il soutient une thèse sur la mécanique quantique. Il est connu pour la distribution singulière qui porte son nom.
- Dirichlet (Peter Gustav Lejeune) 1805-1859 : mathématicien allemand, il suivit ses

études en France. Ses travaux ont surtout porté sur les séries de Fourier et l'arithmétique, mais il se pencha également sur les intégrales et les fonctions discontinues. Il est surtout connu pour la théorie des nombres.

- Fatou (Pierre Joseph Louis) 1878-1929 : mathématicien astronome français né à Lorient, il étudia à l'école normale supérieur. Il prouva que les fonctions sont intégrables au sens de Lebesgue lorsque la limite de l'intégrale de Poisson existe presque partout. Ce résultat fut ensuite généralisé notamment par Riesz. Dans sa thèse il s'intéressa à la théorie des fonctions analytiques complexes.
- Fischer (Ernst Sigismund) 1875-1954 : mathématicien autrichien, il est connu pour son résultat sur la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de constantes soit la suite des coefficients de Fourier d'une fonction de carré intégrable, ce qui le conduit au concept d'espace de Hilbert. Riesz publia la même année ce résultat, qui porte à présent leurs deux noms. Il permit une avancée à la théorie de l'intégration de Lebesgue.
- Fourier (Jean Baptiste Joseph) 1768-1830 : mathématicien et physicien français, instruit par les bénédictins dans une école militaire, il participa à la révolution, où il échappa de peu à la guillotine. Il participa à l'expédition de Napoléon en Égypte en 1798. Il est surtout connu pour ses séries. Il étudia la propagation de la chaleur qui permettra de modéliser l'évolution de la température au travers de séries trigonométriques.
- Fubini (Ghirin Guido) 1879-1943 : mathématicien né à Venise, il s'émigra aux états-unis. Il est connu pour le théorème qui porte sur l'intégration des fonctions dans des espaces à plusieurs dimensions. Il s'intéressa aussi aux équations d'intégrales, et à la théorie des groupes.
- Guelfand (Israël Moisseïevitch) 1913- : mathématicien russe, il s'est principalement intéressé à la théorie des algèbres normées, aux ensembles munis d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes, ainsi qu'aux fonctions généralisées.
- Heaviside (Oliver) 1850-1925 : physicien autodidacte anglais, il développa une méthode pour résoudre des équations différentielles en les transformant en des équations algébriques ordinaires, où il utilise avec peu de rigueur la dérivation. Il est très connu pour sa fonction d'étape, qu'il développa pour l'étude de la propagation des courants électriques dans les conducteurs.
- Hölder (Otto Ludwig) 1859-1937 : mathématicien allemand, il travailla sur la convergence des séries de Fourier et découvrit en 1884 l'inégalité qui porte son nom. Il s'intéressa aussi à la théorie des groupes et à la théorie de Galois.
- Jordan (Marie Ennemond Camille) 1838-1922 : mathématicien français, il fut élève à l'école polytechnique où il enseigna ensuite. Il eut Lebesgue comme élève. La deuxième partie de sa thèse porte sur des périodes des fonctions inverses des intégrales des différentielles algébriques. Il fut particulièrement intéressé par la théorie des groupes finis, mais il est surtout connu pour ses travaux en analyse et topologie.
- Laplace (Pierre Simon) 1749-1827 : astronome, mathématicien et physicien français, fils de cultivateur, il proposa en 1812 la transformation qui porte son nom dans son

ouvrage “Théorie analytique des probabilités”, qui permet entre autre de caractériser les lois de probabilité. Il participa également au développement de la mécanique céleste. Il enseigna à l’école normale supérieur où il eut Fourier comme élève.

- Leibniz (Gottfried Wilhelm von) 1646-1716 : également orthographié Leibnitz, philosophe, scientifique, mathématicien allemand, il a notamment conçu le projet d’une encyclopédie. Il est connu pour sa “raison suffisante” qui a guidé ses recherches. Il s’agit d’un principe fondé sur l’existence d’une raison à toute chose.
- Lebesgue (Henri Léon) 1875-1941 : mathématicien français, élève de l’école normale supérieur, il enseigna à Rennes, à la Sorbonne, puis au collège de France. Sa thèse porte sur une théorie des fonctions mesurables qui est fondée sur la théorie de la mesure de Borel. A partir de ces travaux, il développa la théorie de l’intégration qui répond aux besoins des physiciens. En effet, elle permet de rechercher et de prouver l’existence de primitives pour des fonctions “irrégulières” et recouvre entre autre l’intégrale de Riemann.
- Levi (Beppo) (1875-1961) : mathématicien italien, professeur à l’université de Gênes il s’exila en 1938 en Argentine poussé par les lois antisémites du fascisme mussolinien. Il s’intéressa surtout à la géométrie algébrique, mais aussi à l’analyse fonctionnelle, la théorie des nombres, la logique et la didactique.
- Minkowski (Hermann) 1864-1909 : mathématicien allemand, il proposa une représentation de l’espace temps à quatre dimensions qui fournit une interprétation géométrique de la relativité restreinte de A. Einstein qui fut son élève.
- Newton (Isaac) 1643-1727 : physicien, mathématicien et astronome anglais, il est surtout à l’origine de la mécanique classique dont les trois lois de Newton constituent le fondement. Il inventa en même temps que Leibniz, le calcul différentiel ; il s’intéressa aux dérivées pour formaliser sa théorie de la gravitation universelle.
- Nicodym (Otton Marcin) 1887-1974 : mathématicien hongrois émigré aux états-unis, il est connu pour ses travaux sur la théorie de la mesure et en analyse fonctionnelle. Il travailla entre autre avec Radon, avec lequel il établit un théorème important sur l’existence et l’unicité d’une décomposition d’une mesure positive finie.
- Radon (Johann) 1887-1956 : mathématicien tchèque, il appliqua le calcul des variations à la géométrie différentielle qui le conduit à la théorie des nombres. Il est surtout connu pour sa contribution à la théorie de la mesure et de l’intégration de Lebesgue et Stieltjes.
- Riemann (Bernhard) 1826-1866 : mathématicien allemand, professeur à l’université de Götingen, il est à l’origine de travaux fondamentaux sur le calcul intégral, sur les fonctions de variables complexes. Il développa une théorie plus générale de l’intégration. Il est aussi l’un des premiers à étudier des géométries non-euclidiennes et proposa les prémices de la topologie.
- Riesz (Frédéric ou Frigyes) 1880-1956 : médecin et mathématicien hongrois, il est à l’origine de l’analyse fonctionnelle et de la théorie des opérateurs. Il établit le lien entre les travaux de Lebesgue et les équations d’intégrables. En 1909, il démontre que toute forme linéaire continue sur l’ensemble des foncions continues sur un intervalle compact est une intégrale de Stieljes. Il marque par ses travaux sur la théorie

ergodique, les séries orthonormales et la topologie.

- Stieljes (Thomas Jan) 1856-1894 : mathématicien hollandais immigré en France, il est avant tout connu pour sa généralisation de l'intégrale de Riemman, mais il contribua également à la théorie des espaces de Hilbert, aux équations différentielles partielles, aux fonctions elliptiques, aux séries divergentes et aux fonctions discontinues.
- Schwartz (Laurent) 1915-2002 : mathématicien français, élève de l'école normale supérieur, il enseigna à l'école polytechnique. Il obtient la médaille Field en 1950 pour ses travaux sur la théorie des distributions, dont il est à l'origine.
- Tchebychev (Pafnouti Lvovitch) 1821-1894 : mathématicien russe, son nom est aussi écrit Chebyshov, Chebyshev, ou Tschebyscheff. Il est connu pour ses travaux dans le domaine de la probabilité et des statistiques, en particulier l'inégalité de Tchebychev qui permet de majorer des probabilités (grossièrement) et de démontrer le théorème de la loi forte des grands nombres.

Rappel de définitions

- Borné (ensemble) : un ensemble est borné, si il est contenu dans une boule ouverte.
- Boule : l'ensemble $B(x,t) = \{y : d(x,y) < r\}$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.
- Convergence simple : Une suite de fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}$) converge simplement vers f sur I, si $\forall n \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{\epsilon,x}$ alors $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
- Convergence uniforme : Une suite de fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}$) converge uniformément vers f sur I, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ alors $\forall n \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, ou de manière équivalente $\sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
- Compact : les ensembles fermés et bornés sont dits compacts.
- Fermé : un ensemble est dit fermé si son complémentaire est ouvert.
- Ouvert : U est un ouvert si $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ et $B(x,r) \subset U$, *i.e.* un ouvert contient toujours une boule ouverte centrée en n'importe de ses points. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert. Par exemple, $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts.
- Partition : aussi appelée **subdivision** si $A = \cup_{i \in I} A_i$ et si les ensembles A_i sont différents de l'ensemble vide et disjoints deux à deux, la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de A.
- Topologie : étude des propriétés géométriques et description de classes d'ensembles de points.
- Voisinage : un voisinage d'un point x est une boule ouverte de centre x.

Bibliographie

[BGC94a] P. Benoist-Gueutal et M. Courbage : *Mathématiques pour la physique - Tome 1 - Intégrale de Lebesgue, Fonctions analytiques, Espaces normés.* Eyrolles, Paris, Janvier 1994.

[BGC94b] P. Benoist-Gueutal et M. Courbage : *Mathématiques pour la physique - Tome 2 - Séries de Fourier, Transformations de Fourier et de Laplace, Distributions.* Eyrolles, Paris, Janvier 1994.

[Fer84] J.P. Ferrier : *Mathématiques pour la licence.* Masson, Paris, Juillet 1984.

[God03] R. Godement : *Analyse mathématique IV - Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires.* Springer, 2003.

[Gra88] A. Gramain : *Intégration.* Hermann, Paris, 1988.

[Mal82] P. Malliavin : *Intégration et probabilités analyse de Fourier et analyse spectrale.* Masson, Paris, Février 1982.

[Pet95] R. Petit : *L'outil mathématique - Distributions, convolution, Transformations de Fourier et de Laplace, Fonctions d'une variable complexe, Fonctions eulériennes.* Masson, Paris, Juin 1995.

[Rei95] H. Reinhard : *Éléments de mathématiques du signal - tome 1 - Signaux déterministes.* Dunod, Paris, Août 1995.

Index